

UM ESTUDO SOBRE CONFIABILIDADE DE REDES E MEDIDAS DE CENTRALIDADE EM UMA REDE DE CO-AUTORIA

Táise Ferraz Lyra

Escola Nacional de Ciências e Estatísticas – ENCE/IBGE
Rua André Cavalcanti, 106 – Centro - RJ
taiselyra@gmail.com

Carla Silva Oliveira

Escola Nacional de Ciências e Estatísticas – ENCE/IBGE
Rua André Cavalcanti, 106 – Centro - RJ
carla.oliveira@ibge.gov.br

Resumo

Na literatura, existem algumas maneiras de se calcular a confiabilidade de uma rede modelada por um grafo. Neste trabalho, é exibida a medida de confiabilidade que considera os vértices confiáveis e as arestas não-confiáveis, é feito um estudo da confiabilidade de uma rede de co-autoria e são apresentadas algumas medidas de centralidade de vértices que podem auxiliar na identificação de situações onde a inserção de uma aresta pode aumentar a confiabilidade da rede.

Palavras-chave: Rede, Confiabilidade, Centralidade de Vértices.

Abstract

There are some ways in the literature to calculate the reliability of a network modeled by a graph. In this work, the measure of reliability when the vertices are considered reliable and the edges are unreliable is shown, a study of reliability of a co-authored network is done and are presented some measures of centrality of vertices that can the detection of conditions on which insertion of an edge may improve the reliability of a network.

Keywords: Network, Reliability, Centrality of Vertices.

1. Introdução

Rede complexa é uma forma de modelar a natureza onde as propriedades de um elemento são resumidas às conexões que ele estabelece com outros elementos do mesmo sistema. Em outras palavras, dado um grupo de elementos constituinte de um sistema natural qualquer, deve-se determinar alguma regra para estabelecer uma ligação entre esses elementos, que podem ser pessoas, proteínas, computadores, aeroportos entre outras coisas. As ligações, entretanto, dependem da característica que se quer estudar e refletem propriedades intrínsecas dos elementos considerados. Por exemplo, pessoas podem ser ligadas por conexões de amizade ou devido ao compartilhamento de alguma opinião, enquanto aeroportos estarão ligados se possuem rotas que os conectam.

Rede social é um exemplo de rede complexa, a qual é uma estrutura social composta por pessoas ou organizações, conectadas por um ou vários tipos de relações, que partilham valores e objetivos em comum. Estas redes podem operar em diferentes níveis, como, por exemplo, redes de relacionamento, redes profissionais, redes comunitárias, redes políticas, dentre outras, e permitem analisar a forma como as organizações desenvolvem a sua atividade, como os indivíduos alcançam os seus objetivos ou medir o capital social. A compreensão de suas estruturas, funções e propriedades é fundamental para se pensar como é possível manter a funcionalidade dessas redes. Por isso, os interesses da comunidade científica com relação ao estudo e à modelagem de redes vêm aumentando significativamente nos últimos anos.

A estrutura de uma rede pode ser representada por um grafo. Por isso, a definição e utilização de alguns conceitos básicos da Teoria dos Grafos, tais como grau, adjacência, caminho, conexidade, conectividade de arestas, subgrafo gerador, matriz de adjacência e isomorfismo, são fundamentais na determinação de propriedades referentes a aspectos topológicos de redes. Contudo, como as redes modernas possuem bilhões de vértices, os métodos tradicionais de desenhar essas estruturas topológicas tornam-se ineficazes. Pesquisas recentes têm revelado que uma alternativa para contornar este problema é determinar características e propriedades de grafos de ordem muito grande a partir da análise do comportamento dos vértices e das arestas em grafos pequenos. Por isso, o estudo da confiabilidade de redes passa a ser importantíssimo. A idéia intuitiva de confiabilidade de redes pode ser entendida como a probabilidade de uma rede continuar funcionando mesmo quando uma falha acarretar na remoção de um ou mais subconjuntos de arestas, isto é, a probabilidade de o grafo que modela a rede permanecer conexo após a falha de algumas de suas arestas. Sendo assim, redes altamente confiáveis são estruturas fortes e diz-se também que uma rede é mais confiável que a outra se a probabilidade da primeira ser desconectada for menor do que a da segunda.

Colbourn [C091] apresenta métodos para calcular a confiabilidade de uma rede, onde se considera que apenas as arestas possam falhar, sendo os vértices confiáveis, Goldschmidt *et al.* [GJL06] consideram falhas apenas nos vértices, sendo as arestas confiáveis e Shpungin [Sh06], apresenta uma aproximação combinatorial para o cálculo da confiabilidade, supondo a possibilidade de falha tanto nos vértices quanto nas arestas.

Neste trabalho, é feito um estudo de uma rede de co-autoria considerando o caso onde os vértices são confiáveis e as arestas estão propensas a falhas. Para isto, na Seção 2, são apresentados conceitos básicos sobre Teoria dos Grafos e Confiabilidade de Redes. Na Seção 3, descreve-se a construção da rede de co-autoria apresentada neste trabalho e faz-se um estudo sobre a sua confiabilidade. Na Seção 4, são apresentadas algumas medidas de centralidade que podem auxiliar a ordenação dos vértices da rede em função de sua importância e, finalmente, na Seção 5, a conclusão.

2. Conceitos Básicos

Nesta seção, são apresentados os principais conceitos utilizados ao longo deste trabalho, que podem ser vistos em Boaventura [Bo96].

2.1 Teoria dos Grafos

Um *grafo simples não orientado* $G = (V, E)$ consiste em dois conjuntos V e E , onde V é um conjunto finito e não vazio de n elementos denominados *vértices* e E é um conjunto de subconjuntos de dois elementos de V cujos elementos são denominados *arestas* e cuja cardinalidade é m . Cada aresta é denotada por $\{v_i, v_j\}$, onde $v_i, v_j \in V$. O *grau* de um vértice v_i , $d(v_i)$, é o número de arestas incidentes a ele e dois vértices são denominados *adjacentes* se existe uma aresta entre eles. Um *caminho* é uma sequência de vértices tal que de cada um dos vértices existe uma aresta para o vértice seguinte. Um grafo é *conexo* quando a partir de qualquer um de seus vértices é possível chegar aos demais. Caso contrário, ele é denominado *desconexo*. A *conectividade de arestas de um grafo*, denotada por $\lambda(G)$, é o menor número de arestas que precisam ser retiradas do grafo para torná-lo desconexo. Um *subgrafo gerador* de G é um grafo obtido de G apenas pela supressão de algumas de suas arestas. Um grafo G com n vértices pode ser representado através de uma matriz $A(G)$ de ordem n , denominada *matriz de adjacência de G* , onde a entrada a_{ij} da matriz é igual a 1 se v_i e v_j são adjacentes ou igual a 0 caso contrário, $\forall i, j=1, \dots, n$. Diz-se que dois grafos G_1 e G_2 são *isomorfos*, $G_1 \cong G_2$, quando existe uma bijeção $f: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ tal que $\{v_i, v_j\} \in E(G_1)$ se, e somente se, $\{f(v_i), f(v_j)\} \in E(G_2)$.

2.2 Cálculo da Confiabilidade de uma Rede

Os vértices de um grafo podem representar os terminais de uma rede e suas arestas o meio físico de comunicação entre eles. Para uma rede estar em funcionamento, todo par de vértices deve estar conectado por pelo menos um caminho. Neste contexto, uma rede é modelada por um grafo simples não-orientado $G = (V, E)$. Nestes grafos, cada vértice é perfeitamente confiável e somente as arestas estão propensas a falhas. Tem-se também que cada aresta possui uma probabilidade de falha, a qual é denotada por ρ_e , que é a probabilidade de falha da aresta e . Há casos onde todas as arestas do grafo que modela a rede possuem a mesma probabilidade de falha, a qual é denotada simplesmente por ρ . Além disso, as arestas são duas a duas independentes, isto é, a falha de uma não implica na falha de outra. Para calcular a confiabilidade de uma rede, ou seja, a probabilidade do grafo G que modela esta rede permanecer conexo após a falha de algumas de suas arestas, é necessário determinar a probabilidade de cada estado de funcionamento da rede e depois somar os resultados obtidos, lembrando que uma rede funciona quando todo par de vértices estiver conectado por pelo menos um caminho. A probabilidade de cada estado da rede é dada pelo seguinte produto:

$$\prod_{e \in E} (1 - \rho_e) \prod_{e \in (E \setminus E')} \rho_e,$$

onde E é o conjunto de arestas do grafo e E' é o conjunto formado pelas arestas do grafo que funcionam.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Como um exemplo, considera-se a rede modelada pelo grafo da Figura 2.1.1, onde cada uma de suas arestas possui uma probabilidade de falha distinta das demais.

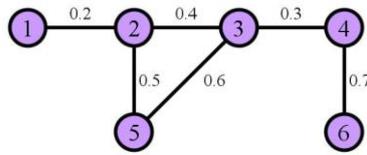


Figura 2.1.1: Grafo G

A confiabilidade da rede modelada pelo grafo G é:

$$R(G, \rho) = (0.8)(0.6)(0.7)(0.5)(0.4)(0.3) + (0.8)(0.7)(0.5)(0.4)(0.3)(0.4) + (0.8)(0.6)(0.7)(0.5)(0.3)(0.6) + (0.8)(0.6)(0.7)(0.4)(0.3)(0.5) = 0.084$$

Quando as arestas do grafo que modela a rede possuem a mesma probabilidade de falha ρ , a confiabilidade da mesma é dada pela seguinte expressão:

$$R(G, \rho) = \sum_{i=n-1}^m S_i (1-\rho)^i \rho^{m-i},$$

onde G é o grafo que modela a rede em questão e S_i é o número de subgrafos geradores conexos de G contendo i arestas.

Agora, supondo que todas as arestas do grafo da Figura 2.1.1 possuem a mesma probabilidade de falha, é preciso, para a determinação da função que expressa a confiabilidade da rede em função de ρ , encontrar os valores de S_i , que, como definidos anteriormente, são o número de subgrafos geradores conexos de G contendo i arestas, os quais são exibidos na Figura 2.1.2.

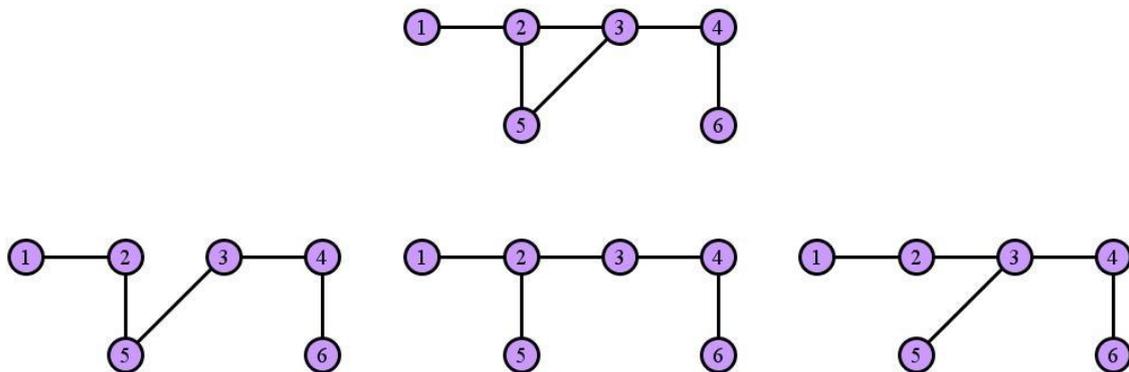


Figura 2.1.2: Subgrafos geradores conexos de G contendo cinco e seis arestas.

Assim, a confiabilidade desta rede é dada pela seguinte função:

$$R(G, \rho) = \sum_{i=5}^6 S_i (1-\rho)^i \rho^{m-i} = 3 (1-\rho)^5 \rho + (1-\rho)^6$$

Então, se, por exemplo, $\rho = 0.4$, tem-se $R(G, \rho) = 0.13997$.

3. Redes de Co-Autoria

Redes sociais são estruturas sociais compostas por pessoas, organizações, territórios, etc., que estão conectadas entre si por um ou vários tipos de relações, sejam elas de amizade, familiares, comerciais, etc., ou que partilham crenças, conhecimento ou prestígio. Redes de co-autoria são um tipo de redes sociais no qual os vértices são autores e a conexão entre eles pode ser estabelecida através de uma publicação em comum.

Neste trabalho, foi construída uma rede de co-autoria formada por pesquisadores da área da Teoria Espectral dos Grafos. Em tal construção, feita através do site *Spectral Graph Theory* (disponível em <http://www.sgt.pep.ufrj.br>), foram considerados apenas os pesquisadores que possuem mais de trinta publicações. Cada pesquisador é representado por um vértice e dois vértices possuem uma aresta entre si se, e somente se, os respectivos pesquisadores possuem pelo menos uma publicação em comum. A rede formada é exibida na Figura 3.1.1.

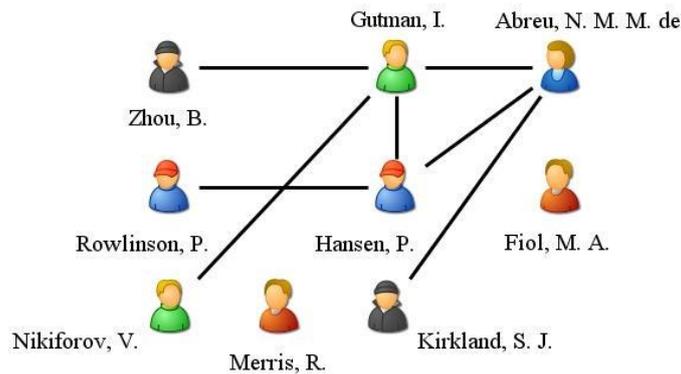


Figura 3.1.1: Rede de co-autoria inicial

Pode-se observar que dois dos pesquisadores da rede formada não possuem publicações com nenhum dos demais, logo são retirados da rede. Abaixo, na Figura 3.1.2, é exibida a rede resultante, à esquerda, bem como sua representação através de um grafo G , à direita.

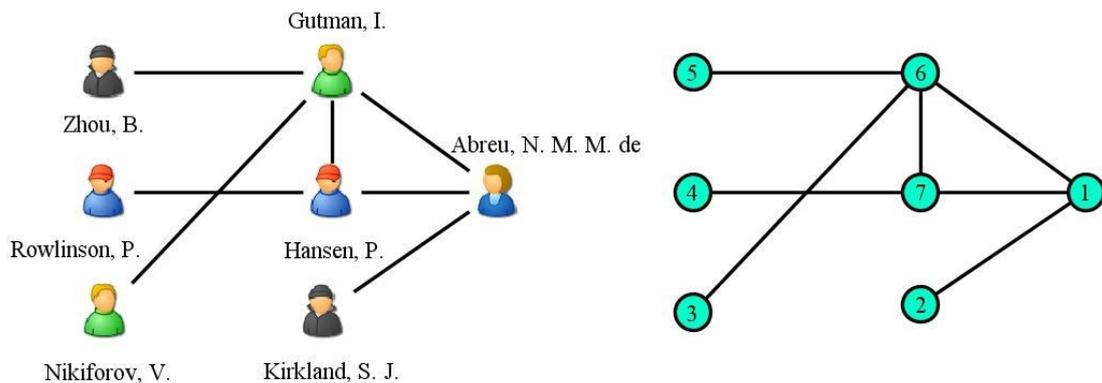


Figura 3.1.2: Rede de co-autoria final e sua representação

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Supondo que as arestas do grafo G que modela a rede de co-autoria construída possuam a mesma probabilidade de falha, a expressão da confiabilidade da rede é dada por:

$$R(G, \rho) = \sum_{i=6}^7 S_i (1-\rho)^i \rho^{m-i} = 3 (1-\rho)^6 \rho + (1-\rho)^7$$

A seguir, através da Tabela 3.1.1, pode-se observar os valores da confiabilidade da rede construída para $\rho = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$.

Tabela 3.1.1: Valor da confiabilidade da rede de co-autoria para diferentes valores de ρ

| Valor da Probabilidade de Falha (ρ) | Valor da Confiabilidade |
|--|-------------------------|
| 0.1 | 0.63773 |
| 0.2 | 0.36700 |
| 0.3 | 0.18824 |
| 0.4 | 0.08398 |
| 0.5 | 0.03125 |
| 0.6 | 0.00901 |
| 0.7 | 0.00175 |
| 0.8 | 0.00017 |
| 0.9 | 0.0000028 |

Considerando o grafo G que modela a rede de co-autoria construída, pode-se pensar em aumentar o valor de sua confiabilidade através da inserção de uma nova aresta com a mesma probabilidade de falha ρ . A Figura 3.1.3 exibe sete grafos não isomorfos gerados a partir de G , através da inserção de uma nova aresta e a Tabela 3.1.2 exibe o valor da confiabilidade para cada um desses grafos com $\rho = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$.

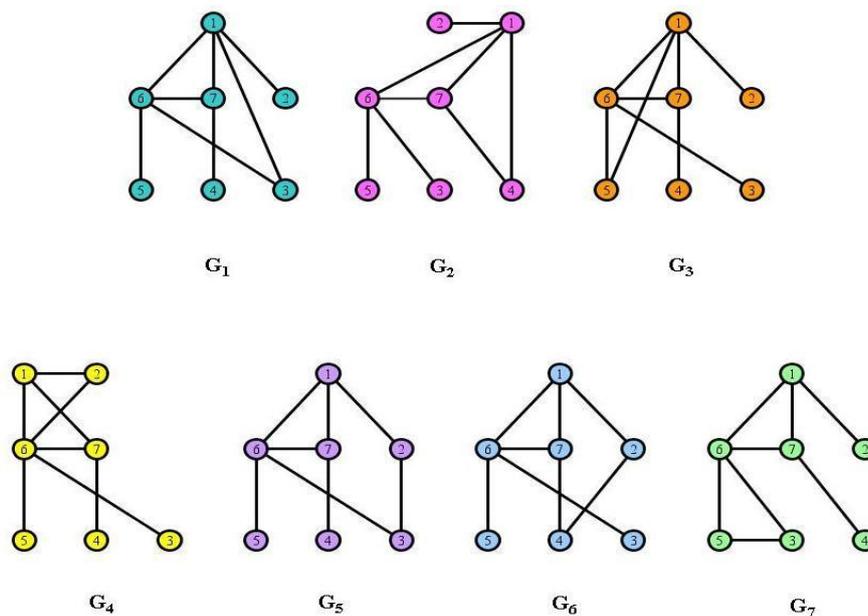


Figura 3.1.3: Grafos não isomorfos gerados a partir de G

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Tabela 3.1.2: Confiabilidade dos grafos não isomorfos gerados a partir de G , onde $m = 8$ e $n = 7$, para diferentes valores de ρ

| Valor da Probabilidade de Falha (ρ) | Grafo | | | | | | |
|--|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | G_1 | G_2 | G_3 | G_4 | G_5 | G_6 | G_7 |
| 0.1 | 0.71213 | 0.71213 | 0.71213 | 0.71213 | 0.77590 | 0.77590 | 0.76528 |
| 0.2 | 0.46137 | 0.46137 | 0.46137 | 0.46137 | 0.53477 | 0.53477 | 0.51380 |
| 0.3 | 0.26589 | 0.26589 | 0.26589 | 0.26589 | 0.32236 | 0.32236 | 0.30118 |
| 0.4 | 0.13250 | 0.13250 | 0.13250 | 0.13250 | 0.16601 | 0.16601 | 0.15117 |
| 0.5 | 0.05469 | 0.05469 | 0.05469 | 0.05469 | 0.07031 | 0.07031 | 0.06250 |
| 0.6 | 0.01737 | 0.01737 | 0.01737 | 0.01737 | 0.02277 | 0.02277 | 0.01982 |
| 0.7 | 0.00369 | 0.00369 | 0.00369 | 0.00369 | 0.00491 | 0.00491 | 0.00420 |
| 0.8 | 0.00038 | 0.00038 | 0.00038 | 0.00038 | 0.00051 | 0.00051 | 0.00043 |
| 0.9 | 0.000007 | 0.000007 | 0.000007 | 0.000007 | 0.000009 | 0.000009 | 0.000008 |

Pode-se observar, através da Tabela 3.1.2, que dentre todas as possibilidades de inserção de uma aresta, os grafos que tiveram o maior aumento em sua confiabilidade foram os grafos G_5 e G_6 , obtidos através de G pela inserção de uma aresta entre os vértices 2 e 3 e 2 e 4, respectivamente.

Agora, supondo que as arestas do grafo G que modela a rede de co-autoria construída possuam probabilidades de falhas distintas escolhidas, por exemplo, aleatoriamente conforme Figura 3.1.4 e que todas as arestas inseridas para o aumento da confiabilidade da rede em questão possuam a mesma probabilidade de falha $\rho = 0.5$, a Figura 3.1.5 exhibe os sete grafos não isomorfos gerados a partir de G , bem como a probabilidade de falha de cada uma das arestas de tais grafos, e a Tabela 3.1.3 exhibe os valores da confiabilidade de cada um dos mesmos. Através da fórmula do cálculo da confiabilidade de rede quando as probabilidades de falha das arestas são distintas, tem-se que a confiabilidade do grafo G antes de qualquer inserção de aresta é igual a 0.30618.

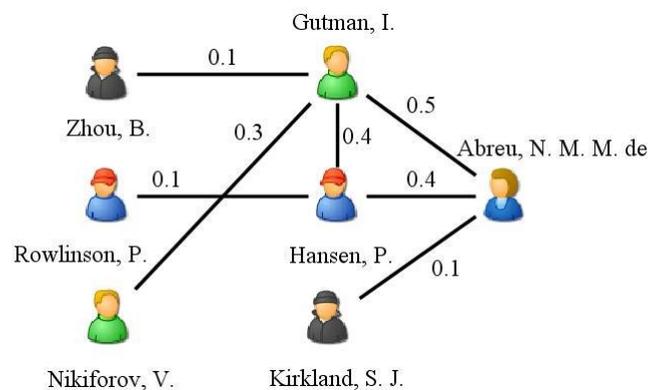


Figura 3.1.4: Rede de co-autoria com arestas possuindo diferentes probabilidades de falha

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

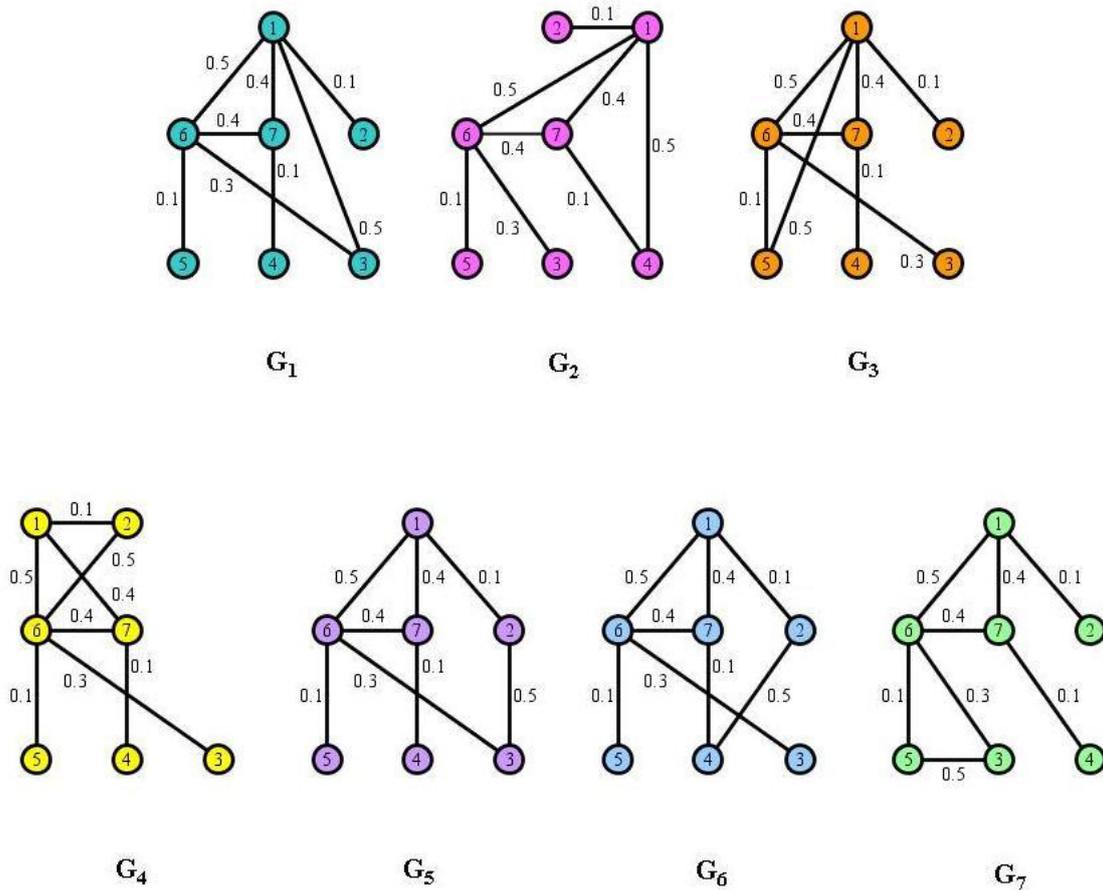


Figura 3.1.5: Grafos não isomorfos gerados a partir de G , com arestas possuindo diferentes probabilidades de falha

Tabela 3.1.3: Confiabilidade dos grafos não isomorfos gerados a partir de G , considerando o caso onde as arestas possuem probabilidades de falha distintas

| Grafo | Valor da Confiabilidade | Aumento na Confiabilidade (%) |
|-------|-------------------------|-------------------------------|
| G_1 | 0.43303 | 41.43 |
| G_2 | 0.37422 | 122.22 |
| G_3 | 0.38443 | 125.56 |
| G_4 | 0.38443 | 125.56 |
| G_5 | 0.45004 | 146.99 |
| G_6 | 0.39123 | 127.78 |
| G_7 | 0.3888 | 126.98 |

Pode-se observar, através da Tabela 3.1.3, que dentre todas as possibilidades de inserção de uma aresta, o grafo que teve o maior aumento em sua confiabilidade foi o grafo G_5 , obtido de G ligando os vértices 2 e 3.

Com isso, surgem as seguintes perguntas: por que, no caso onde as arestas da rede de co-autoria construída possuem a mesma probabilidade de falha, a inserção da aresta entre os vértices 2 e 3, formando o grafo G_5 , bem como a inserção da aresta entre os vértices 2 e 4, formando o grafo G_6 , geraram o maior impacto no aumento da confiabilidade da rede de co-autoria estudada? E por que, no caso onde as arestas da rede de co-autoria construída possuem probabilidades de falha distintas, a inserção da aresta entre os vértices 2 e 3, formando o grafo G_5 , gerou o maior impacto no aumento da confiabilidade da rede de co-autoria estudada? Para responder a essas questões, pode-se utilizar algumas medidas de centralidade que são introduzidas na próxima seção.

4. Medidas de Centralidade

As medidas de centralidade podem ser utilizadas para verificar o quanto um vértice de uma rede é mais importante em relação aos demais. A partir do resultado de cada medida de centralidade, é possível ordenar os vértices da rede em função de sua importância relativa. Entretanto um vértice não estará obrigatoriamente na mesma posição de acordo com a análise de todas as medidas. Isto acontece, pois a expressão utilizada para o cálculo de uma cada dessas medidas está associada a um significado distinto das demais. Por isso, ao analisar uma rede através da centralidade de seus vértices, deve-se identificar o contexto do problema para escolher qual medida é a mais adequada para a análise, vide Bonacich [Bo87], Bonacich [Bo01], Freeman [Fr79], Wasserman e Faust [WF94].

4.1 Alguns Tipos de Medidas de Centralidade

A seguir, são apresentados alguns tipos de medidas de centralidade.

4.1.1 Medida de Proximidade (Closeness)

Está relacionada com a distância total de um vértice aos demais da rede. Seja $D = [d_{v_i v_j}]$ uma matriz $n \times n$, cujo elemento $d_{v_i v_j}$ representa a menor distância do vértice v_i ao vértice v_j , $\forall 1 \leq i, j \leq n$. O cálculo da centralidade de proximidade do vértice v_i é dado por:

$$C_c(v_i) = \left(\sum_{j=1}^n d_{v_i v_j} \right)^{-1}.$$

Isto significa que a centralidade de proximidade do vértice v_i é simplesmente o inverso da soma das distâncias do vértice v_i aos demais vértices da rede. O elemento mais central da rede é aquele com o maior valor de $C_c(v_i)$, visto que este elemento é o que se comunica com maior agilidade aos demais elementos. $C_c(v_i)$ é no máximo igual a $(n-1)^{-1}$, quando o vértice é adjacente a todos os outros vértices da rede, e no mínimo igual a 0, quando um ou mais vértices não são adjacentes a nenhum outro vértice em questão. Pode-se, então, observar que o valor máximo de $C_c(v_i)$ depende do número total de vértices existentes na rede. Sendo assim, para que seja possível a comparação de redes com diferentes tamanhos, é necessária a normalização desta medida, dada por:

$$C'_c(v_i) = \frac{n - 1}{\left(\sum_{j=1}^n d_{v_i v_j} \right)}.$$

A medida de centralidade de proximidade normalizada assume valores entre 0 e 1 e pode ser vista como o inverso da distância média entre o vértice v_i aos demais vértices da rede. $C'_c(v_i)$ é igual a 1 quando o vértice em questão é adjacente a todos os outros vértices da rede.

A centralidade de proximidade representa a velocidade de acesso de um elemento v_i aos demais da rede. Esta medida é importante na análise da velocidade de acesso do fluxo de dados ou de informação a partir de um vértice para todos os demais existentes na rede. A medida de proximidade é utilizada para apontar vértices que necessitam de melhoria em relação à qualidade dos serviços.

A relação desta medida ao tempo de chegada do fluxo até um destino é válida somente nos casos onde a origem do fluxo é um ponto qualquer, porém conhecido, e o destino possa ser qualquer vértice da rede. Se o tráfego não fluir pelos menores caminhos, a interpretação desta medida como um indicador de tempo até a chegada do fluxo perde o sentido. Sendo assim, pode-se aplicar esta medida a duas classes de processo envolvendo transmissão de fluxo: aqueles onde o tráfego flui através dos menores caminhos e aqueles onde o fluxo é difundido por duplicação paralela. Neste caso, todos os tipos de trajetórias ocorrem simultaneamente, inclusive o caminho geodésico. Com isso, o efeito para a rede será o mesmo. É importante citar que a difusão do fluxo por duplicação paralela ocorre quando a cada instante o fluxo é transmitido de um vértice para diversos outros simultaneamente, ficando todos estes vértices, o emissor e os receptores, de posse do fluxo transmitido. O caminho geodésico é um tipo de trajetória do fluxo no qual o mesmo percorre a rede de um vértice a outro sempre pelos menores caminhos através de duplicação e ao longo de sua trajetória jamais retorna a um vértice já visitado anteriormente.

4.1.2 Medida de Autovetor (Eigenvector)

A centralidade de autovetor atribui relevância a um vértice em função de sua relação com os demais vértices da rede. Se um vértice está ligado a outros que se encontram em uma posição central na rede, o mesmo terá centralidade de autovetor alta. A centralidade do vértice v_i é dada por x_i , que satisfaz a seguinte equação:

$$\lambda x_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n.$$

Através da equação acima, conclui-se que a posição de um elemento v_i na rede é uma função dos elementos aos quais ele está conectado.

Em notação matricial, tem-se:

$$Ax = \lambda x.$$

As soluções de λ e (x_1, \dots, x_n) correspondem, respectivamente, aos autovalores e autovetores da matriz de adjacência do grafo que modela a rede. Utilizam-se os valores do

autovetor associado ao maior autovalor da matriz para a identificação dos vértices de maior influência na rede. Assim, quanto maior for o valor de x_i , maior será a centralidade do vértice v_i .

Esta medida é ideal para analisar casos de difusão de informação, infecção, ou de comportamento pessoal, onde se consideram múltiplos caminhos simultâneos com percurso aleatório. Nestes casos, um elemento conectado a vértices que por sua vez conecta-se a um grande número de outros vértices é um potencial transmissor indireto de informações, pensamentos ou doenças.

Um vértice com alto valor desta medida de centralidade tem grande probabilidade de transmitir o fluxo para muitos outros elementos da rede de forma indireta, através dos elementos aos quais ele se conecta.

4.1.3 Medida de Grau (Degree)

Representa um importante aspecto da posição estrutural do vértice e atribui relevância ao vértice em função do número de ligações diretas que o mesmo estabelece com os demais vértices da rede. Seu valor é calculado pelo grau do vértice em questão, conforme a seguinte expressão:

$$C_d(v_i) = d(v_i), 1 \leq i \leq n.$$

$C_d(v_i)$ também pode ser obtido através da soma dos elementos da i -ésima linha da matriz de adjacência do grafo que modela a rede. Sendo assim, tem-se:

$$C_d(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

Também se pode definir a centralidade de grau como o número de caminhos de comprimento unitário que tem origem em um vértice. Sendo assim, em processos de difusão de fluxo em redes, esta medida deve ser aplicada a casos cujas ligações indiretas entre vértices não são levadas em consideração, visto que seu cálculo contabiliza apenas ligações diretas entre os vértices.

Esta medida também pode ser considerada de efeito imediato ou de influência, onde um vértice interfere diretamente em outros. Através dela, pode-se observar que um vértice com alta centralidade de grau mantém contato com muitos outros.

A medida em questão depende do número total de vértices existentes na rede. $C_d(v_i)$ é no máximo igual a $n - 1$. Então, para que seja possível a comparação de redes com diferentes tamanhos, é proposta a normalização desta medida, dada por:

$$C'_d(v_i) = \frac{d(v_i)}{n - 1}, 1 \leq i \leq n.$$

Considerando a rede de co-autoria exibida na Figura 3.1.2, a Tabela 4.1.1 exhibe o valor das medidas de centralidade para cada um dos vértices do grafo G que a modela.

Tabela 4.1.1: Medidas de centralidade para o grafo G da Figura 3.1.2.

| Vértice | Proximidade | Autovetor | Grau |
|---------|-------------|-----------|------|
| 1 | 9 | 0.4985 | 3 |
| 2 | 14 | 0.1965 | 1 |
| 3 | 13 | 0.2246 | 1 |
| 4 | 14 | 0.1965 | 1 |
| 5 | 13 | 0.2246 | 1 |
| 6 | 8 | 0.5700 | 4 |
| 7 | 9 | 0.4985 | 3 |

5. Conclusão

Silva [Si10] apresenta uma relação, constatada através de simulações práticas, entre as medidas de centralidade de Proximidade, Autovetor e Grau e a confiabilidade de redes quando as probabilidades de falha das arestas são iguais. As simulações realizadas são feitas considerando a construção de todos os possíveis grafos para $n = 4, 5$, com $n-1 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$, e para $n = 6$, com $7 \leq m \leq 10$. Os testes totalizam mais de 250 simulações.

O procedimento adotado inicia-se com um grafo G , onde são calculadas as medidas de centralidade de seus vértices e é inserida uma aresta em cada ponto possível gerando um novo grafo G' . Então, a partir de um dos grafos G' , é inserida uma segunda aresta, também em cada ponto possível, para que a confiabilidade seja calculada e comparada com as demais. O processo iterativo é repetido até que o grafo se torne completo. Em mais de 98% dos casos analisados a medida de centralidade de Grau indicou entre quais vértices, que foram os menos centrais com respeito a essa medida, deveria ser inserida uma nova aresta para a obtenção da máxima confiabilidade possível. Entretanto, em 19% desses casos, esta indicação não definiu o novo grafo, pois havia mais de uma possibilidade de interligação que gera grafos não isomorfos com valores de confiabilidade distintos.

Analisando a Tabela 4.1.1, observa-se que, segundo as medidas de Proximidade, Autovetor e Grau, os vértices menos centrais são o 2 e o 4. Com isso e levando em conta todos os testes realizados em Silva [Si10], se o objetivo é tornar a rede mais confiável com a inserção de uma nova aresta, pode-se pensar na ligação dos vértices 2 e 4. Tal fato já tinha sido observado na Seção 3, no caso onde as arestas da rede de co-autoria construída possuem a mesma probabilidade de falha, porém o cálculo da confiabilidade de uma rede é bastante desgastante de ser executado de forma manual e até mesmo computacional. Logo, a utilização de medidas de centralidade parece ser uma outra alternativa que pode auxiliar na análise do aumento da confiabilidade de uma rede.

No entanto, no caso onde as arestas da rede de co-autoria formada possuem probabilidades de falha distintas, a aresta que provocou o maior aumento na confiabilidade da mesma ao ser inserida não foi a indicada pelas medidas de centralidade. Então, quando as arestas da rede não possuem a mesma probabilidade de falha, a utilização de medidas de centralidade não parece ser uma alternativa auxiliar na análise do aumento da confiabilidade de

uma rede, pelo que foi observado no exemplo considerado. Para obtermos uma resposta mais precisa sobre isto, é necessária a realização de simulações.

Referências Bibliográficas

[Bo96] BOAVENTURA NETTO, P.O. (1996). Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos. 3ª Ed., São Paulo, Edgard Blücher Ltda.

[Bo87] BONACICH, P. (1987). Power and Centrality: A Family of Measures. The American Journal of Sociology, 92, nº 5, 1170-1182.

[Bo01] BONACICH, P. (2001). Eigenvector-like measures of centrality for asymmetric relations. Social Networks, 23, 191-201.

[Co91] COLBOURN, C. J. (1991). Combinatorial Aspects of Network Reliability. Annals of Operations Research, 33, 3-15.

[EGT10] ESPECTRAL GRAPH THEORY. Disponível em: <http://www.sgt.pep.ufrj.br>. Acesso em: 8 de Agosto de 2010.

[Fr79] FREEMAN, L. C. (1979). Centrality in networks: I. Conceptual clarification. Social Networks, 1, 215-239.

[GJL06] GOLDSCHMIDT, O. & JAILLET, P. & LASOTA, R. (2006). On Reliability of Graphs with Node Failures. Networks, 24, 251-259.

[Sh06] SHPUNGIN, Y. (2006). Combinatorial Approach to reliability Evaluation of Network with Unreliable Nodes and Unreliable Edges. International Journal of Computer Science, volume1, 177-183, number 3.

[Si10] SILVA, T. (2010). Um estudo de medida de centralidade e Confiabilidade de Redes. Dissertação de Mestrado em Tecnologia. Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca.

[WF94] WASSERMAN, S. & FAUST, K. (1994). Social Network Analysis: Methods and Applications (Structural Analysis in the Social Sciences), Cambridge University Press.