**Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento**
Vol. 20, e20005, p. 1-17, 2026

**ISSN 1984-3534**

# MIP-HEURÍSTICAS APLICADAS À SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES COM FRACIONAMENTO LIMITADO[1]

**Deisemara Ferreira[a] *, Daniel Jelin[a], João V. Naves Mesa[b], Pedro Munari[c]**

[a] Departamento de Física, Química e Matemática
Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba-SP, Brasil

[b] Departamento de Computação
Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba-SP, Brasil

[c] Departamento de Engenharia de Produção
Universidade Federal de São Carlos, São Carlos-SP, Brasil

Recebido 28/04/2026, aceito 25/09/2026

**RESUMO**

Neste artigo, MIP-heurísticas dos tipos *relax and fix* e *fix and optimize* são investigadas para a resolução do Problema de Dimensionamento de Lotes em Máquinas Paralelas com Fracionamento Limitado. Esse problema é motivado por um caso real da indústria de linha branca (eletrodomésticos). Os experimentos computacionais mostram que as heurísticas propostas obtêm soluções de boa qualidade em tempos computacionais reduzidos, inclusive para instâncias de maior porte e horizontes de planejamento mais longos. Adicionalmente, testes de complexidade mostraram que a combinação *relax and fix* e *fix and optimize* foi capaz de obter soluções factíveis para instâncias mais desafiadoras, para as quais o modelo matemático não encontrou soluções dentro do limite de quatro horas, reforçando o potencial das abordagens propostas para a solução de problemas de maior complexidade.

**Palavras-chave: Dimensionamento de lotes, fracionamento de lotes, processo de produção de eletrodomésticos.**

**ABSTRACT**

In this paper, MIP-heuristics based on the relax-and-fix and fix-and-optimize approaches are investigated to solve the Lot Sizing Problem on Parallel Machines with Limited Lot Splitting. This problem is motivated by a real-world case in the white goods (home appliances) industry. The computational experiments show that the proposed heuristics obtain high-quality solutions in reduced computational times, including for larger instances and longer planning horizons. Additionally, complexity tests showed that the combination of *relax and fix* and *fix and optimize* was able to obtain feasible solutions for challenging instances, for which the mathematical model did not return feasible solutions within the four-hour time limit, reinforcing the potential of the proposed approaches for solving more complex problems.

**Keywords: Lot sizing, Batch splitting, home appliance production process.**

* Autor para correspondência. E-mail: deise@ufscar.br
DOI: https://doi.org/10.59254/PODes.2026.005

[1] *Todos os autores assumem a responsabilidade pelo conteúdo do artigo.*

## 1. Introdução

A indústria brasileira de eletroeletrônicos registrou em 2024 seu melhor resultado em dez anos, com a venda ao varejo de 117,7 milhões de unidades, segundo balanço da Associação Nacional dos Fabricantes de Produtos Eletroeletrônicos (Eletros). O segmento da chamada linha branca, que compreende geladeiras, lavadoras e fogões, experimentou uma alta de 17% em relação a 2023, com a venda de 15,6 milhões de unidades, retomando assim o volume de vendas pré-pandemia (Agência Brasil, 2025a).

Ao divulgar o balanço de 2024, a associação dos fabricantes previa o crescimento continuado em 2025 de 5%, no cenário mais conservador, a 10%, no cenário mais otimista (Agência Brasil, 2025b). Explica-se a projeção otimista por uma característica marcante do mercado da linha branca, que é a demanda historicamente reprimida (Santos et al., 1995), em razão do custo do crédito e do perfil socioeconômico do país. Dados sobre os lares brasileiros coletados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) evidenciam o potencial para a expansão do mercado. A título de exemplo: apenas 46% da população pobre do país vive em lares equipados com lavadoras de roupa (IBGE, 2024).

As projeções de crescimento, contudo, não se confirmaram – nem a otimista, nem a conservadora. Ao contrário, o setor experimentou ligeira retração em 2025: as vendas recuaram 1% em relação a 2024 (Chiara, 2026). O principal fator para a frustração de expectativas, segundo a Eletros, foi o aumento dos juros, dada a importância das compras a crédito para o setor. Mas também pesaram: a inflação, a volatilidade do câmbio e até as condições climáticas, por sua influência sobre a venda de refrigeradores, freezers e cervejeiras. Segundo a Eletros, "as empresas seguirão focadas em otimizar estoques, ampliar a eficiência produtiva e ajustar prazos de negociação com fornecedores e varejo, buscando equilíbrio entre oferta, demanda e custos" (Agência Brasil, 2025b).

"Otimizar estoques", "ampliar a eficiência" e "ajustar prazos" são algumas das tarefas de que a Pesquisa Operacional tradicionalmente se encarrega, como se sabe, desde suas origens, em meados do século XX. Uma contribuição da Pesquisa Operacional na otimização do planejamento da produção de itens da linha branca é a modelagem e solução do Problema de Dimensionamento de Lotes em Máquinas Paralelas com Fracionamento Limitado (Lot Sizing Problem with Parallel Machines and Limited Splitting, LSPMLS), estudado inicialmente por Bergamini et al. (2021).

O LSPMLS tem por objetivo minimizar os tempos de produção, considerando os tempos de processamento de cada item, em cada linha, ao longo do horizonte de planejamento. São características desse problema: múltiplos itens; múltiplos recursos; múltiplas linhas paralelas, com velocidades diferentes e não relacionadas; capacidade limitada; e restrições ao fracionamento dos lotes. Sua solução consiste na determinação das quantidades de lotes, inteiros ou fracionados, que serão produzidos de cada produto, em cada linha, em cada período.

O problema possui natureza combinatória, o que dificulta a obtenção de soluções ótimas para o planejamento da produção (Bergamini et al., 2021). Este estudo foi motivado por um caso real em que um fabricante usualmente não conseguia atender nem 80% da demanda mensal programada. O planejamento e o controle da produção eram conduzidos exclusivamente por meio de planilhas eletrônicas e baseados na experiência dos gestores, o que limitava a eficiência operacional. A aplicação de técnicas de Pesquisa Operacional ao problema proporcionou ganhos significativos, com reduções de até 9,43% no tempo de processamento dos produtos e de até 55% no número de fracionamentos (Bergamini et al., 2021).

Contudo, os avanços reportados na literatura permanecem limitados à resolução de instâncias de pequeno porte, uma vez que, para horizontes de planejamento superiores a três meses, não se obtêm soluções factíveis dentro de limites computacionais de tempo razoáveis (e.g., quatro horas). Revisões recentes sobre modelos de programação inteira mista para problemas de dimensionamento e sequenciamento de lotes também evidenciam a diversidade de características consideradas nas formulações e a necessidade de estratégias de solução capazes de lidar com problemas de maior complexidade (Noble-Ramos et al., 2025). Nesse cenário, destaca-se a necessidade de abordagens mais eficientes e escaláveis. Assim, este trabalho propõe e investiga MIP-heurísticas baseadas nas

abordagens *relax and fix* e *fix and optimize*, com o objetivo de viabilizar a resolução de instâncias de grande porte, ampliar a aplicabilidade prática das técnicas de otimização e permitir uma maior automação da tomada de decisões.

## 2. Revisão da Literatura

O LSPMLS é uma extensão do clássico Problema de Dimensionamento de Lotes com Capacidade Limitada (Capacitated Lot-sizing Problem, CLSP)(Drexl e Kimms, 1997). Encontrar uma solução ótima para ele, com mais de um item e setups independentes, é um problema da classe NP-difícil (Bitran e Yanasse,1982). Logo, a solução de problemas dessa classe tipicamente requer abordagens heurísticas (Arenales et al., 2015; Hillier e Lieberman, 2015).

Uma estratégia amplamente utilizada ainda hoje para resolver esses problemas são as MIP-heurísticas *relax and fix* e *fix and optimize*.

*Relax and fix* é uma heurística construtiva proposta por Dillenberger et al. (1994), com o nome de "*fix-and-relax*", para encontrar a solução de um problema de dimensionamento de lotes na indústria de semi-condutores.

A abordagem *relax and fix* decompõe um problema inteiro em uma sequência de subproblemas menores. Em cada iteração, as variáveis inteiras são particionadas em três subconjuntos: (i) variáveis mantidas inteiras; (ii) variáveis temporariamente relaxadas; e (iii) variáveis já fixadas. Resolve-se então o subproblema correspondente e, caso uma solução factível seja obtida, os valores das variáveis inteiras são fixados. O processo é repetido até que todas as variáveis estejam fixadas, produzindo uma solução factível para o problema original.

A heurística *fix and optimize*, proposta em Pochet e Wolsey (2006) como "exchange", se assemelha a *relax and fix* mas é uma técnica de melhoria que parte de uma solução incumbente. O problema é decomposto em subproblemas nos quais as variáveis são particionadas em dois subconjuntos: variáveis fixadas e variáveis livres (inteiras) para reotimização. A cada iteração, um subconjunto é selecionado para otimização, mantendo-se as demais variáveis fixas, e a solução incumbente é atualizada.

Ambas as heurísticas são fáceis de implementar e têm sido muito utilizadas em problemas de dimensionamento de lotes de diferentes setores (Boutarfa et al., 2024). A *relax and fix* é a estratégia mais usada, dentre as chamadas MIP-heurísticas, sendo que a partição mais frequente do conjunto de variáveis é baseada em intervalos de tempo (Villas Boas et al., 2021; Friske et al., 2022).

O desempenho dessas MIP-heurísticas depende diretamente da estratégia de partição das variáveis a serem relaxadas e fixadas. Nesse sentido, o trabalho de Silva e Mateus (2023) ilustra o impacto dessa escolha ao abordar o problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes em um *flow shop* híbrido por meio das heurísticas *relax and fix* e *fix and optimize*. Os autores avaliam diferentes estratégias de decomposição — baseadas em produtos, demanda, períodos, estágios e ordem cronológica — e mostram que decomposições por períodos tendem a produzir soluções de melhor qualidade, enquanto estratégias baseadas em produtos evidenciam um trade-off entre qualidade da solução e custo computacional. Esses resultados reforçam a importância da escolha da estratégia de decomposição, motivando as abordagens investigadas neste trabalho.

A variedade de possíveis partições também é ilustrada em Araujo et al. (2023), que testam 11 estratégias para aplicar *relax and fix* em um caso real de dimensionamento e sequenciamento de lotes em máquinas paralelas, com *setups* dependentes da sequência, na indústria de descartáveis de higiene. As nove estratégias dependentes do problema consideram ordenações por períodos (cronológicos ou por demanda), por produtos (demanda, flexibilidade ou discrepância) e por máquinas (eficiência ou "criticidade"). As estratégias independentes utilizam o peso das variáveis na função objetivo e a distância da solução relaxada à integralidade. Os autores relatam reduções de custo entre 40% e 46%, destacando que a decomposição cronológica por períodos apresentou o melhor desempenho.

Ferreira et al. (2009) exploram 15 estratégias distintas para a aplicação da heurística *relax*

*and fix* a um problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes multiestágio no setor de bebidas, baseado no caso real de uma fábrica no Brasil. As abordagens variam quanto à partição do conjunto de variáveis (por período, por máquina ou por estágio) e também quanto à estratégia de fixação (por variável de decisão, por estágio ou condicionada à existência de produção no período). Além disso, os autores investigam a combinação dessas estratégias com a relaxação das variáveis inteiras de todo o primeiro estágio do processo produtivo, considerando que o gargalo se encontra no segundo estágio, e avaliam seis configurações distintas do solver CPLEX, incluindo o uso de pré-processamento, geração de planos de corte e modo heurístico intensivo. Os resultados variam conforme a instância, mas os autores destacam uma abordagem que alcançou ganhos de até 27,4% em relação à solução adotada pela fábrica: partição das variáveis por máquina e período; fixação das variáveis de produção e *setup*; e uso da configuração padrão do solver, com exceção da desativação da geração de planos de corte.

O particionamento do conjunto de variáveis de decisão por período, em problemas multiperíodos, pode ser considerado a abordagem clássica, podendo ser realizado tanto em ordem cronológica crescente quanto decrescente (*forward* e *backward*).

Na aplicação da heurística *relax and fix*, Ferreira et al. (2010) resolvem um problema de planejamento da produção de refrigerantes utilizando partição por período no modo *forward*, explorando cinco estratégias de fixação combinadas com sete configurações distintas do solver. As abordagens diferem quanto à variável de decisão fixada (setup, *changeover* ou tamanho do lote), à condição de existência de produção e à possibilidade de reavaliar períodos ociosos em iterações futuras. As configurações do solver, por sua vez, variam quanto à ativação ou desativação de recursos, como planos de corte e *local branching*. Catorze abordagens superaram os resultados da fábrica, destacando-se aquela que combina: fixação das variáveis de *setup* e *changeover*, condicionada à produção, com reavaliação de períodos ociosos; e uma configuração do solver que desativa planos de corte e pré-processamento, ativando a heurística *relaxation induced neighborhoods*. Nessa configuração, o ganho foi de 47,2% em relação à solução da planta.

Villas Boas et al. (2021) adotam as heurísticas do tipo *relax and fix* e *fix and optimize* para resolver o problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes com seleção de configuração de processo – em que diferentes configurações são conhecidas a priori e têm custos e tempos de setup dependentes da sequência. A abordagem foi aplicada a problemas do setor de móveis, embalagens de polpa moldada e embalagens de grãos eletrofundidos. Os autores experimentam quatro abordagens da heurística *relax and fix*: *forward*; *backward*; *forward*, mas com sobreposição (a cada iteração apenas parte das variáveis é fixada); e *forward*, mas sob a condição de não atrasar a demanda (caso haja atraso, as variáveis fixadas no período anterior podem ser recalculadas). Para a heurística *fix and optimize*, foram usadas duas estratégias de partição: por período e por configuração. Os melhores resultados foram obtidos com a combinação da *relax and fix forward*, com possibilidade de reavaliação das variáveis em caso de atraso, e *fix and optimize* com partição por configuração.

Cabe ressaltar que mesmo a abordagem heurística pode se revelar computacionalmente onerosa e levar à infactibilidade. Larroche et al. (2022) consideram uma extensão do problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes na indústria de alimentos, com as seguintes características: capacitado, multi-itens, máquinas paralelas, *setups* dependentes da sequência, estoques de segurança, horas extras e, sempre que a demanda não é satisfeita, perda de vendas. Para resolvê-lo, os autores recorrem às heurísticas *relax and fix* e *fix and optimize*, mas, ainda assim, o problema se mostra intratável. A heurística é então modificada para agrupar os produtos em *clusters*, assumindo que, para itens do mesmo grupo, os custos e tempos de *setup* são desprezíveis. Com essa estratégia, obtêm-se soluções factíveis para instâncias de médio e grande porte em menos de 3 e 5 minutos, respectivamente.

As heurísticas *relax and fix* e *fix and optimize* também podem ser combinadas com outras abordagens. Carvalho e Nascimento (2022) abordam o problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes em máquinas paralelas com *setups* dependentes da sequência e não triangulares —

isto é, custos ou tempos de *setup* que podem violar a desigualdade triangular. Para solucioná-lo, os autores propõem a combinação dessas heurísticas com *path relinking* e *kernel search*. A heurística *path relinking* utiliza um conjunto de soluções factíveis (obtidas por meio de *relax and fix* e *fix and optimize*) como ponto de partida para a busca de soluções melhores, explorando o caminho que conecta duas soluções conhecidas. Já a heurística *kernel search* possui duas fases: na inicialização, define-se um conjunto de variáveis promissoras que compõem o *kernel* do problema, enquanto as demais são fixadas em zero; na fase de extensão, o problema é resolvido iterativamente, com a inclusão progressiva de variáveis no *kernel*. Os resultados mostram que as soluções obtidas pelas MIP-heurísticas podem ser significativamente aprimoradas por meio dessas abordagens.

Uma generalização da heurística *relax and fix*, denominada *restrict-and-fix*, é apresentada por Joncour et al. (2023). A estratégia baseia-se na distinção entre variáveis locais e globais: as variáveis locais são resolvidas em subproblemas organizados segundo uma determinada ordem, enquanto as globais estão presentes em todos os subproblemas e são tratadas apenas ao final, após a fixação das variáveis locais. Os autores aplicam essa estratégia a diferentes classes de problemas — dimensionamento de lotes, roteamento de veículos, empacotamento e otimização de portfólio — e demonstram sua competitividade, especialmente em instâncias de grande porte.

A decomposição com sobreposição é explorada por Santos et al. (2025) em uma variação do problema de dimensionamento de lotes que considera o reaproveitamento de itens retornados por defeito. Nesse caso, as heurísticas *relax and fix* e *fix and optimize* são aplicadas em ordem cronológica com sobreposição, de modo que, a cada iteração, apenas parte das variáveis inteiras é fixada. Os autores concluem que a abordagem apresenta bom desempenho, obtendo soluções factíveis para a maioria das instâncias testadas.

França et al. (2026) aplicam uma combinação das heurísticas *relax and fix* e *fix and optimize* à extensão do CLSP com múltiplos itens e máquinas paralelas e não-relacionadas, com partição das variáveis baseada em intervalos de tempo. Na implementação da heurística *fix and optimize*, os autores propõem duas formulações: uma estática, outra dinâmica. A versão estática corresponde à implantação convencional da *fix and optimize*, em que os parâmetros de partição são fixos – no caso, a janela de integralidade e o avanço dessa janela ao longo do horizonte de planejamento. A versão dinâmica permite que ambos os parâmetros variem caso uma rodada do algoritmo não produza uma solução melhor: o tamanho da janela aumenta, e seu avanço é ajustado em atenção a um limite para a sobreposição dos subconjuntos. Aplicadas a um conjunto de instâncias da literatura, as estratégias estática e dinâmica retornaram solução com melhorias de 76,9% e 80% no gap de otimalidade, respectivamente.

Silva e Mateus (2026) valem-se das heurísticas *relax and fix* e *fix and optimize* para resolver o problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes com múltiplos itens em um ambiente de produção híbrido de flow shop, com múltiplos estágios e, em pelo menos um deles, máquinas paralelas e não relacionadas. A pesquisa é baseada num caso real da indústria química, e os autores propõem duas abordagens: restrições de fluxo em rede como estratégia para definir a sequência da produção em cada período, sem a necessidade de estabelecer microperíodos ou fixar um número constante de slots; e uma abordagem inspirada no problema de localização de instalações, em que as restrições usuais de balanço de estoque são substituídas por restrições que alocam a demanda futura a períodos de produção. Para a aplicação das heurísticas, a estratégia consiste na decomposição do problema em ordem cronológica crescente, com sobreposição. A janela de integralidade é de dois períodos, e o seu avanço, de um em um. Entre seus resultados, os autores destacam que a abordagem heurística se mostrou uma alternativa eficaz ao solver comercial no trato das instâncias mais complexas.

Cabe destacar que essas MIP-heurísticas também podem ser aplicadas a problemas estocásticos, como em (Boutarfa et al., 2024), e a problemas não lineares, como em (De Smet et al., 2020).

Do exposto, observa-se que as heurísticas *relax and fix* e *fix and optimize* são frequentemente empregadas em conjunto, oferecendo um bom trade-off entre qualidade da solução e tempo de

execução (Larroche et al., 2022). Além disso, mostram-se competitivas em diversas aplicações industriais — como bebidas, alimentos, móveis, produtos de higiene e embalagens — sob restrições de tempo e recursos computacionais, motivando pesquisas voltadas à ampliação de seu desempenho por meio de diferentes estratégias de decomposição (Luo et al., 2025).

Na presente pesquisa, diferentes MIP-heurísticas dos tipos *relax and fix* e *fix and optimize* são investigadas para a resolução do Problema de Dimensionamento de Lotes em Máquinas Paralelas com Fracionamento Limitado. Instâncias com dados reais, obtidos da literatura científica, e instâncias geradas a partir de dados reais são utilizadas nos testes computacionais. A seguir é descrito o problema completo.

## 3. Descrição do Problema (LSPMLS)

O processo de produção pesquisado no presente artigo se refere à produção de uma montadora de fogões e lavadoras no interior de São Paulo (Bergamini et al., 2021). A fábrica estudada possui seis linhas de produção, três para a montagem de lavadoras, duas para fogões e uma para cooktops, produzindo dezenas de itens, em lotes de tamanho padrão, preferencialmente.

O problema a ser resolvido tem como objetivo minimizar o tempo de produção e evitar o fracionamento de lotes, o que depende de uma programação adequada de cada linha em cada período.

Na fábrica o planejamento da produção é hierárquico. Primeiro se definem os lotes que serão produzidos, dia a dia, em cada linha de montagem. Com base nesta decisão, define-se então a sequência em que os lotes serão produzidos. Assim, o sequenciamento dos lotes é um desdobramento do dimensionamento de lotes e não é considerado no escopo da presente pesquisa.

Assim como no CLSP, o LSPMLS considera múltiplos itens e restrições de capacidade. Mas, diferente do CLSP, o LSPMLS também leva em conta múltiplas linhas de produção paralelas, com velocidades não relacionadas e capacidade limitada; múltiplos recursos, com capacidades limitadas; tamanho mínimo e tamanho padrão de lotes; e restrições relativas ao fracionamento dos lotes.

As demandas de cada item são estáticas e devem ser atendidas. As restrições de capacidade são por linha em cada período; por recurso a cada período; e de recurso no total no horizonte de planejamento. Itens diferentes podem compartilhar o mesmo recurso, e linhas diferentes podem produzir o mesmo item. O tamanho padrão e o tamanho mínimo de lote se aplicam a todos os produtos, de modo a otimizar as operações de embalagem e distribuição. Fracionamentos são permitidos, mas limitados - e devem ser evitados.

Não são considerados os custos com inventário, pois não há estoque de produtos na fábrica: depois da montagem, os itens são despachados para um centro de distribuição, e assim os custos com inventário são tratados em um nível acima deste planejamento.

Além das decisões clássicas e difíceis de um problema de dimensionamento de lotes, tais como os itens competirem por máquinas e recursos, nesse problema há decisões adicionais relativas ao fracionamento de lotes. Ele é possível e necessário quando a capacidade disponível em um determinado período não é suficiente para completar a produção de um lote iniciado. Nesses casos, permite-se que o lote seja parcialmente processado ao final do período corrente, sendo a quantidade remanescente obrigatoriamente produzida no início do período subsequente, na mesma linha de produção, sem ser considerado um atraso.

No entanto, o fracionamento é sujeito a restrições operacionais importantes: apenas o último lote processado em cada linha e período pode ser fracionado, há um limite máximo de fracionamentos por período, e a quantidade produzida em cada fração deve respeitar um tamanho mínimo de lote. Essas restrições visam evitar perdas de eficiência e aumento excessivo da complexidade operacional, de modo que o fracionamento deve ser utilizado apenas quando estritamente necessário.

Adicionalmente, distingue-se o fracionamento de lotes dos chamados lotes residuais. Enquanto o fracionamento decorre de limitações de capacidade ao longo do horizonte de planejamento, os lotes residuais surgem quando a demanda de um item não é múltipla do tamanho padrão de lote.

Nesse caso, permite-se a produção de um único lote com quantidade inferior ao tamanho padrão, exclusivamente para atender exatamente a demanda. Diferentemente dos lotes fracionados, os lotes residuais não estão associados a restrições de capacidade, mas sim à estrutura da demanda.Tendo em vista o tamanho padrão de lote é necessário impor que haja apenas um lote residual por produto.

## 4. Métodos de Solução

Conforme mencionado nas seções anteriores do presente artigo, desenvolvemos MIP-heurísticas do tipo *relax and fix* e *fix and optimize* para resolver o problema LSPMLS.

As MIP-heurísticas desenvolvidas no presente artigo para a solução do LSPMLS utilizam o modelo de otimização proposto por Bergamini et al. (2021), o qual é descrito de forma sucinta a seguir.

**Conjuntos, índices e parâmetros:**

- $P$: conjunto de itens ($i \in P$).
- $L$: conjunto de linhas ($k \in L$).
- $T$: conjunto de períodos ($t \in T$).
- $R$: conjunto de recursos ($r \in R$).
- $P_r$: conjunto de itens que compartilham o $r$-ésimo recurso ($i \in P_r \subset P$).
- $L_i$: conjunto de linhas que produzem o $i$-ésimo item ($k \in L_i \subset L$).
- $C_r$: capacidade do recurso $r$ no horizonte de planejamento.
- $Cd_r$: capacidade do recurso $r$ a cada período.
- $Ch_{kt}$: capacidade da linha $k$ no período $t$.
- $p_{ik}$: tempo de processamento do item $i$ na linha $k$.
- $Q$: tamanho do lote padrão.
- $q$: tamanho do lote mínimo.
- $d_i$: demanda do item $i$ no horizonte de planejamento.
- $\hat{d}_i$: número de lotes de tamanho padrão (quociente da divisão euclidiana de $d_i$ por $Q$).
- $\bar{d}_i$: tamanho do lote residual (resto da divisão euclidiana de $d_i$ por $Q$).
- $H$: penalidade por fracionamento de lotes.

**Variáveis de decisão**

$x_{ikt} \in \mathbb{Z}^+$: número de lotes do item $i$, de tamanho padrão Q, produzidos na linha $k$ no período $t$.

$$y_{ikt} = \begin{cases} 1, & \text{se há produção de lote residual do item } i \text{ na linha } k \text{ no período } t; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$z_{ikt} = \begin{cases} 1, & \text{se há fracionamento de lote do item } i \text{ em produção na linha } k \text{ no período } t; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$w_{ikt} \in \mathbb{Z}^+$: quantidade do item $i$ que faltou produzir na linha $k$ no período $t$ devido ao fracionamento do lote - e que será produzida no período $t+1$.

**Função objetivo e restrições**

$$\text{Minimizar} \sum_{i \in P} \sum_{k \in L} \sum_{t \in T} \left( p_{ik} \cdot Q \cdot x_{ikt} + p_{ik} \cdot \bar{d}_i \cdot y_{ikt} + H \cdot z_{ikt} \right) \tag{1}$$

Sujeito a:

$$\sum_{k\in L_i}\sum_{t\ in T}\left(Q\cdot x_{ikt}+\bar{d}_i\cdot y_{ikt}\right)=d_i,\forall i\in P \tag{2}$$

$$\sum_{k\in L_i}\sum_{t\in T}x_{ikt}=\hat{d}_i,\forall i\in P \tag{3}$$

$$\sum_{k\in L_i}\sum_{t\in T}y_{ikt}\leq 1,\forall i\in P \tag{4}$$

$$\sum_{i\in P}z_{ikt}\leq 1,\forall k\in L,\ t\in T \tag{5}$$

$$w_{ikt}\leq Q\cdot x_{ikt}+\bar{d}_i\cdot y_{ikt},\forall i\in P,\ k\in L,\ t\in T \tag{6}$$

$$w_{ikt}\leq (Q-q)\cdot z_{ikt},\forall i\in P,\ k\in L,\ t\in T \tag{7}$$

$$q\cdot z_{ikt}\leq w_{ikt},\forall i\in P,\ k\in L,\ t\in T \tag{8}$$

$$\sum_{t\in T}\sum_{i\in P_r}\sum_{k\in L_i}\left(Q\cdot x_{ikt}+\bar{d}_i\cdot y_{ikt}\right)\leq C_r,\forall r\in R \tag{9}$$

$$\sum_{i\in P_r}\sum_{k\in L_i}\left(Q\cdot x_{ikt}+\bar{d}_i\cdot y_{ikt}+w_{ik(t-1)}-w_{ikt}\right)\leq Cd_r,\forall r\in R,\ t\in T \tag{10}$$

$$\sum_{i\in P}p_{ik}\cdot\left(Q\cdot x_{ikt}+\bar{d}_i\cdot y_{ikt}+w_{ik,t-1}-w_{ikt}\right)\leq Ch_{kt},\forall k\in L,\ t\in T \tag{11}$$

$$w_{ik0}=0,\forall i\in P,\ k\in L \tag{12}$$

$$w_{ik|T|}=0,\forall i\in P,\ k\in L \tag{13}$$

$$x_{ikt},w_{ikt}\in\mathbb{Z}^+,0\leq w_{ikt}\leq Q-q,\forall i\in P,\ k\in L,\ t\in T \tag{14}$$

$$y_{ikt},z_{ikt}\in\{0,1\},\forall i\in P,\ k\in L,\ t\in T \tag{15}$$

Neste modelo, a função objetivo (1) minimiza o tempo total de produção, os lotes residuais e, o fracionamento de lotes.

As restrições (2) e (3) garantem o atendimento da demanda, somados os lotes de tamanho padrão e os residuais. A restrição (4) impõe que, para cada produto, apenas um lote seja residual - todos os demais terão o tamanho padrão. A restrição (5) limita a quantidade de fracionamentos de lotes por linha, por período. A fábrica estipula um só fracionamento por período.

As restrições (6), (7) e (8) modelam o fracionamento de lotes e impõem limites mínimo e máximo às quantidades fracionadas. As restrições (9), (10) e (11) limitam a produção às capacidades de recursos e das linhas.

As restrições (12) e (13) estabelecem que o horizonte de planejamento não inicie nem termine com fracionamento de lotes. Por fim, as restrições (14) e (15) definem o domínio das variáveis de decisão.

As heurísticas do tipo *relax and fix* desenvolvidas na presente pesquisa utilizam as variáveis de decisão $x_{ikt}, y_{ikt}, z_{ikt}, w_{ikt}$, particionadas em blocos correspondentes a dez períodos (dias). A Figura 1 representa a estratégia das heurísticas *relax and fix*.

Na primeira iteração, todas as variáveis dos dez primeiros períodos são tratadas como inteiras ($t = 1$ até $t = 10$), e as demais ($t \geq 11$) são relaxadas. O subproblema associado é resolvido, as variáveis dos últimos cinco períodos ($t = 6$ até $t = 10$) desse primeiro bloco são fixadas enquanto as demais variáveis do mesmo bloco continuam soltas ($t = 1$ até $t = 5$). Na iteração 2, variáveis de mais dez períodos ($t = 11$ até $t = 20$), antes relaxadas, passam a ser tratadas como inteiras. Resolve-se novo subproblema, e as variáveis dos últimos cinco períodos desse bloco ($t = 16$ até

$t = 20$) são fixadas enquanto as demais continuam soltas ($t \geq 21$). E assim percorre-se todo o conjunto de variáveis, de dez em dez períodos, sendo que apenas metade deles tem suas variáveis fixadas a cada iteração. Cabe observar que a partição clássica por período do conjunto de variáveis foi testada e resultou em subproblemas infactíveis. Isso ocorreu pois a produção que deveria ocorrer nos períodos iniciais tendia a se acumular nos períodos finais, que estavam com as variáveis relaxadas. Nas últimas iterações, esse períodos não possuem capacidade suficiente para produzir todos os itens.

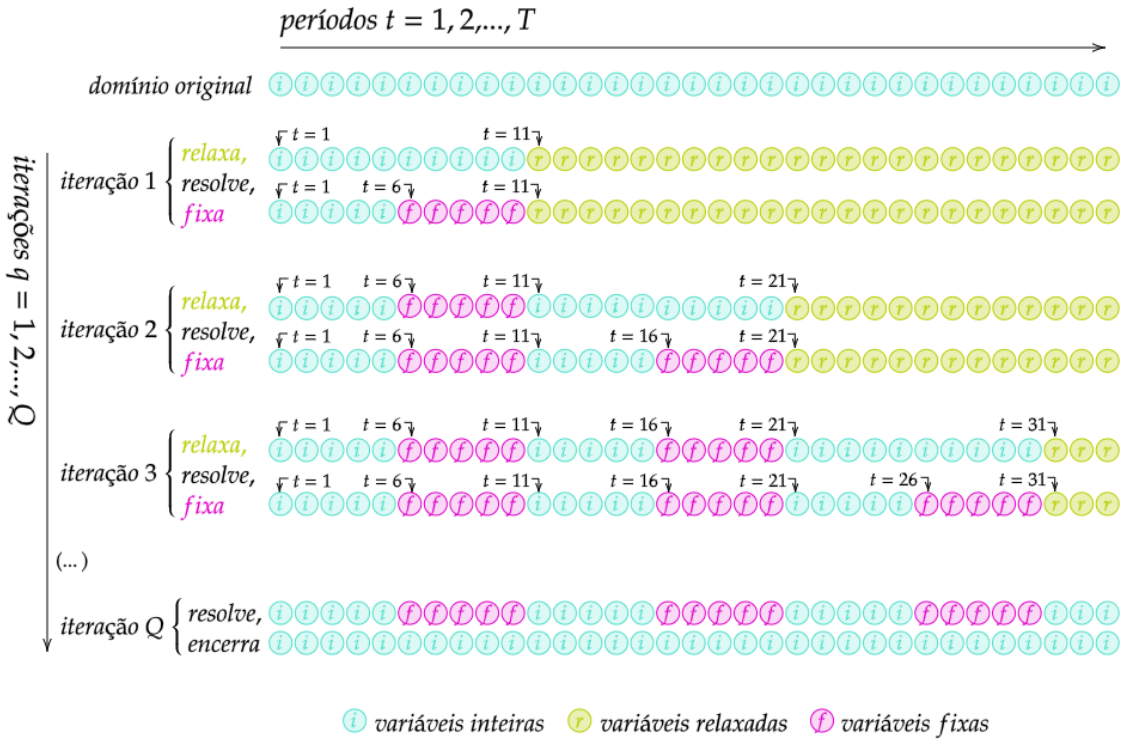



Figura 1: Iterações da heurística relax and fix. Fonte: autores

Assim como na *relax and fix*, a heurística *fix and optimize* também exige a definição de uma estratégia de partição e fixação do conjunto de variáveis de decisão. Aqui, adotou-se a estratégia *forward* com partição do conjunto de variáveis por período.

Foram testadas cinco estratégias de solução para o problema LSPMLS, aqui denominadas Experimentos, baseadas nas MIP-heurísticas *relax and fix* e *fix and optimize*. A tabela 1 sintetiza as 5 estratégias.

Tabela 1: Estratégias de solução para o problema LSPMLS.

| **Experimento** | **Abordagem** |
|---|---|
| I (M) | Modelo LSPML resolvido pelo CPLEX. |
| II (RF-F) | Relax and fix estratégia forward. |
| III (RF-B) | Relax and fix estratégia backward. |
| IV (FO) | CPLEX + Fix and optimize. |
| V (RFFO) | Relax and fix + fix and optimize. |

Fonte: autores.

A primeira, denominada de Experimento I, consiste na solução do modelo utilizando o solver de otimização CPLEX.

Os Experimentos II e III correspondem à aplicação de duas heurísticas do tipo *relax and*

*fix*. No Experimento II, emprega-se a estratégia *forward* (RF-F), enquanto no Experimento III as partições são exploradas em ordem *backward* (RF-B).

Os experimentos IV e V consistem na aplicação da heurística de melhoria *fix and optimize*. Ela demanda uma solução inicial. No experimento IV (FO), foi usada como solução inicial a primeira solução factível obtida pelo solver CPLEX na solução do modelo de otimização. No experimento V (RFFO), foi usada a solução obtida por meio da heurística *relax and fix*, com a estratégia *forward* (RF-F).

Com o objetivo de avaliar o desempenho das abordagens propostas, a próxima seção apresenta os experimentos computacionais realizados.

## 5. Dados dos Experimentos Computacionais

Nesta seção, são descritas as instâncias do problema, bem como o ambiente computacional e as configurações adotadas nos experimentos computacionais.

Foram utilizadas seis instâncias do problema LSPMLS obtidas da literatura científica (Bergamini et al., 2021) e outras três geradas na presente pesquisa. As instâncias diferem por seu horizonte de planejamento (1 a 12 meses) e número de itens (72 a 201), mas compartilham outros parâmetros, como o número de recursos e linhas de montagem.

O gráfico da Figura 2 a seguir ilustra a dimensão de cada uma das nove instâncias resolvidas em termos de períodos e número de itens. O horizonte de planejamento em dias é dado pelo eixo horizontal, e a quantidade de itens, no eixo vertical. A legenda indica: as instâncias da literatura já resolvidas (A, B, C) e com as quais, portanto, foi possível comparar as soluções obtidas; as instâncias da literatura não resolvidas dentro do limite de tempo (E, F, G); e três novas instâncias (D, H, I), uma com horizonte de planejamento trimestral e duas com horizonte de planejamento anual. Cabe salientar que, a simulação de diferentes horizontes de planejamento justifica-se pela necessidade de representar diferentes níveis de decisão neste tipo de processo produtivo. O horizonte trimestral permite maior detalhamento das decisões de curto prazo, considerando capacidade, estoques e atendimento da demanda. Já os horizontes anuais possibilitam apoiar decisões estratégicas, incorporando sazonalidade, variações da demanda e decisões de produção e estoque com uma visão mais abrangente do planejamento.

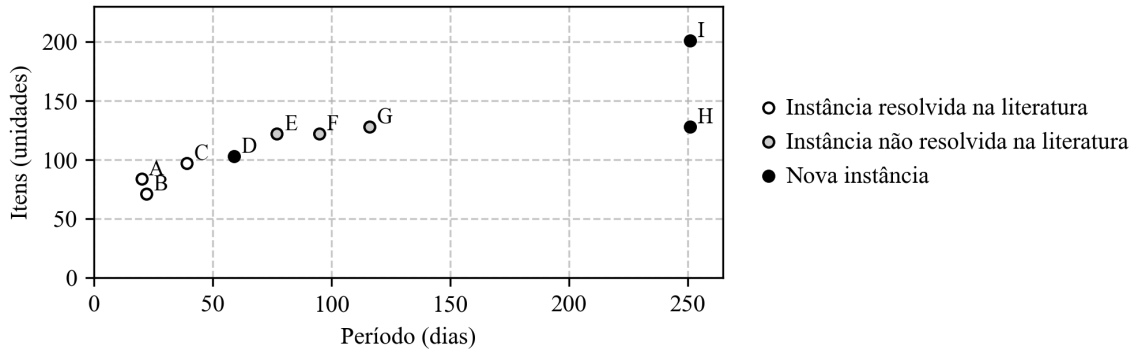



Figura 2: Quantidade de itens e períodos, por instância. Fonte: autores.

As estratégias da Tabela 1 foram aplicadas na solução das nove instâncias. Elas foram implementadas na linguagem de programação Python, versão v3.10.0, com uso do pacote IBM Decision Optimization CPLEX Modeling for Python v2.28.240. Todos os experimentos foram implementados em um computador com processador de 3.20 GHz, 96 GB de memória RAM, e solucionados com a versão v22.1.0.0 do solver CPLEX.

Para todos os experimentos, adotou-se o gap de otimalidade padrão do CPLEX de 0,01% e como critério de parada a otimalidade ou tempo limite de 4 horas. Além disso, foi definido em todos os casos o limite de 1 fracionamento por linha e por período e penalidade $H = 1$ por

fracionamento, que são as mesmas condições definidas por Bergamini et al. (2021).

As instâncias utilizadas nos experimentos, incluindo aquelas geradas nesta pesquisa, estão disponibilizadas em formato estruturado no repositório associado ao estudo (Mesa, 2026), de modo a facilitar a reprodução dos experimentos e a utilização dos dados em trabalhos futuros.

## 6. Resultados dos Experimentos Computacionais

Nesta seção, são apresentados e analisados os resultados dos experimentos computacionais realizados para avaliar as cinco estratégias de solução propostas para o LSPMLS. Inicialmente, é apresentada uma análise da programação da produção obtida, permitindo visualizar a distribuição dos produtos entre as linhas e os períodos do horizonte de planejamento. Em seguida, é analisado o desempenho computacional das diferentes estratégias, considerando os tempos de solução e a qualidade das soluções obtidas. Por fim, são avaliadas versões de maior complexidade da instância de maior porte, com o objetivo de verificar a capacidade das abordagens heurísticas em lidar com problemas que apresentam maior dificuldade computacional.

### 6.1. Visão do Planejamento

Com o auxílio do gráfico de Gantt, é possível analisar a estrutura da programação da produção obtida para a instância A, considerando a distribuição dos itens entre as seis linhas de montagem (L1,...,L6) e ao longo dos 20 períodos (dias) do horizonte de planejamento. Essa representação possibilita visualizar simultaneamente a utilização da capacidade produtiva, a distribuição dos produtos e a ocorrência de fracionamentos. A Figura 3 representa o gráfico de Gantt da solução ótima dessa instância. Cada faixa horizontal representa uma linha de montagem. Ao longo delas, barras coloridas indicam lotes de diferentes itens, sendo que a largura de cada barra é proporcional ao tempo de processamento do lote no respectivo dia. A letra **f** indica a ocorrência de fracionamento do lote, representado no modelo pela variável $z_{ikt} = 1$, enquanto o tamanho da parcela fracionada é representado pela variável $w_{ikt}$.

Observamos inicialmente uma variação muito grande dos tempos de produção entre as linhas de montagem e ao longo de cada uma, o que reflete a variação de capacidades do total de horas trabalhadas ao longo do horizonte de planejamento: de um dia para o outro, o parâmetro $Ch$ (capacidade da linha) pode ser reduzido à metade, a um quinto e até um décimo de seu valor.

O gráfico também mostra a distribuição dos modelos de produtos pelas seis linhas de montagem. Chama a atenção que cada modelo de fogão ou cooktop seja produzido numa única linha: linha 4 ou 5, no caso dos fogões; linha 6, no caso dos cooktops. É também o caso da maioria das lavadoras, montadas nas linhas 1, 2 e 3. Um pequeno grupo de modelos de lavadoras, contudo, pode ser produzido em duas e até três linhas, e esse parece ser o ponto mais delicado do planejamento. Na instância A, as lavadoras representam aproximadamente 51% da demanda total da fábrica, em unidades, resultando em uma maior utilização da capacidade das linhas 1, 2 e 3, nas quais esses produtos são produzidos, e, consequentemente, em menor folga de capacidade. Esses itens também concentram a maior ocorrência de fracionamentos de lotes, com aproximadamente um fracionamento por dia na linha 3.

Tendo em vista que essa solução é uma solução ótima, observa-se que o fracionamento dos lotes realmente é necessário para um melhor aproveitamento da capacidade das linhas.

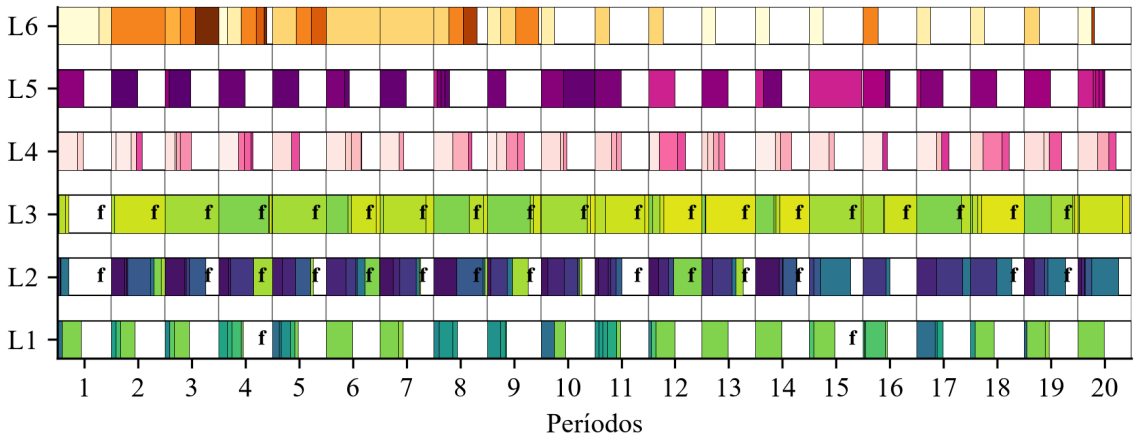



Figura 3: Programação da produção instância A. Fonte: autores.

### 6.2. Desempenho Computacional das Estratégias

Inicialmente comparamos a solução retornada com o Experimento I, que é solução do modelo via CPLEX, com as soluções apresentadas na literatura. Isso porque os resultados da literatura foram obtidos em um computador com processador de 2.7 GHz, 8 GB de RAM, versão v12.8 do solver e no presente trabalho utilizamos um computador com configuração superior. O objetivo é observar o tempo de solução nas três instâncias para as quais se tem solução ótima, e ainda o tempo e a qualidade de solução (valor da função objetivo) nas instâncias não resolvidas na literatura no tempo limite.

A Tabela 2 sintetiza esses resultados do Experimento I. Os tempos indicados na tabela estão em segundos.

Tabela 2: Valor da função objetivo e tempo de solução na literatura e no Experimento.

| | | **A** | **B** | **C** | **E** | **F** | **G** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Lit.** | F.O. | 4.821.954 | 5.013.502 | 8.837.456 | - | - | - |
| | tempo | $< 300$ | $< 300$ | $< 300$ | 14.400* | 14.400* | 14.400* |
| **Exp. I (M)** | F.O. | 4.821.930 | 5.013.532 | 8.837.734 | 17.453.344 | 17.410.102 | 26.693.368 |
| | tempo | 13,5 | 27,1 | 328,7 | 695,6 | 41,7 | 1220,4 |

* sem solução no tempo limite de 4 horas. Fonte: autores.

Comparando as soluções com a da literatura, notamos que o valores da função objetivo diferem um pouco. Isso ocorre em razão dos gaps de otimalidade dos experimentos. Bergamini et al. (2021) estipulam em $10^{-5}$ o gap de otimalidade, e aqui se adota para todos os experimentos o valor default do CPLEX, $10^{-4}$.

Nota-se na Tabela 2 que o Experimento I retornou soluções factíveis para todas as instâncias da literatura, incluindo as três instâncias que ainda não haviam sido resolvidas dentro do limite de tempo (E, F, G).

Os resultados obtidos com os outros experimentos e as outras duas instâncias geradas (H e I) estão organizados na Tabela 3. Ela traz os resultados de todos os cinco experimentos conduzidos no presente trabalho para as nove instâncias, com os tempos de execução em segundos, e o gap relativo que mede o desvio percentual da solução heurística em relação à solução obtida pelo modelo, e é calculado utilizando a fórmula $\frac{FO_{heur} - FO_{\text{modelo}}}{FO_{\text{modelo}}} \times 100$, onde $FO_{heur}$ é o valor da função objetivo da solução factível retornada pela MIP-heurística e $FO_{\text{modelo}}$ é o valor da função objetivo da solução retornada pelo modelo de otimização. Em negrito, estão realçados os melhores tempos de solução de cada instância, considerando todos os experimentos, e os menores gaps dentre as estratégias heurísticas.

Tabela 3: F.O. e tempo de solução do modelo e das abordagens heurísticas.

| **Inst.** | | **I (M)** | **II (RF-F)** | **III (RF-B)** | **IV (FO)** | **V (RFFO)** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | F.O. | 4.821.930 | 4.822.230 | 4.822.100 | 4.835.896 | 4.822.230 |
| A | tempo | 13,5 | 6,3 | 71,4 | **5,8** | 9,7 |
| | gap (%) | | 0,0062 | **0,0035** | 0,2896 | 0,0062 |
| | F.O. | 5.013.532 | 5.013.761 | 5.013.641 | 5.016.776 | 5.013.761 |
| B | tempo | 27,1 | 35,3 | 25,6 | **14,5** | 39,9 |
| | gap (%) | | 0,0046 | **0,0022** | 0,0647 | 0,0046 |
| | F.O. | 8.837.734 | 8.837.762 | 8.838.399 | 8.870.582 | 8.837.760 |
| C | tempo | 328,7 | 37,7 | 40,9 | **25,9** | 53,9 |
| | gap (%) | | **0,0003** | 0,0075 | 0,3717 | **0,0003** |
| | F.O. | 13.657.692 | 13.658.145 | 13.658.589 | 13.690.595 | 13.658.062 |
| D | tempo | 564,9 | 76,6 | **57,9** | 255,4 | 107,7 |
| | gap (%) | | 0,0033 | 0,0066 | 0,2409 | **0,0027** |
| | F.O. | 17.453.344 | 17.454.776 | 17.455.362 | 17.457.661 | 17.454.776 |
| E | tempo | 695,6 | **156,5** | 278,9 | 235,3 | 230,6 |
| | gap (%) | | 0,0082 | 0,0116 | 0,0247 | **0,0082** |
| | F.O. | 17.410.102 | 17.410.132 | 17.410.431 | 17.516.336 | 17.410.009 |
| F | tempo | 41,7 | 55,6 | **30,4** | 57,9 | 124,5 |
| | gap (%) | | 0,0002 | 0,0019 | 0,6102 | **-0,0005** |
| | F.O. | 26.693.368 | 26.695.351 | 26.696.005 | 26.765.673 | 26.695.267 |
| G | tempo | 1220,4 | 1974,9 | 721,3 | **384,8** | 2359,6 |
| | gap (%) | | 0,0074 | 0,0099 | 0,2709 | **0,0071** |
| | F.O. | 26.642.446 | 26.645.563 | 26.646.413 | 26.791.665 | 26.645.452 |
| H | tempo | 606,7 | 224,6 | **196,6** | 307,3 | 836,5 |
| | gap (%) | | 0,0117 | 0,0149 | 0,5601 | **0,0113** |
| | F.O. | 32.965.676 | 32.966.230 | 32.966.939 | 32.965.676 | 32.966.144 |
| I | tempo | 3990,4 | 1468,5 | **1157,5** | 4120,1 | 1985,7 |
| | gap (%) | | 0,0017 | 0,0038 | **0,0000** | 0,0014 |
| | F.O. | 17.055.091 | 17.055.995 | 17.056.431 | 17.101.207 | 17.055.941 |
| **Média** | tempo | **832,1** | **448,4** | **286,7** | **600,8** | **638,7** |
| | gap (%) | | **0,0048** | **0,0069** | **0,2703** | **0,0046** |

Fonte: autores

As estratégias heurísticas retornaram soluções factíveis com alta qualidade em termos de custos totais, ou seja, próximas da solução ótima e, reduziram significativamente o tempo de execução em comparação com o Experimento I. Em média, o experimento III (RF-B) apresentou o melhor desempenho, com tempo de solução de 286,7 segundos, uma redução de aproximadamente 65% , enquanto o experimento V (RFFO) foi o mais lento, com média de 638,7 segundos. Em termos de qualidade, os desvios em relação à solução ótima foram inferiores a 0,01% na maioria dos casos (aproximadamente 70%), atingindo, no pior cenário, 0,2703%. Esse desempenho é particularmente evidente nas heurísticas baseadas em *relax and fix* (RF-F e RF-B) e em sua combinação com *fix and optimize* (RFFO), enquanto a aplicação isolada de *fix and optimize* apresentou gaps mais elevados.

Cabe destacar o bom desempenho das heurísticas na solução de instâncias que, na literatura, não haviam sido resolvidas dentro do tempo limite de tempo de quatro horas (E, F e G). Considerando, em cada caso, a melhor estratégia aplicada, foi possível obter soluções em poucos minutos: menos de 3 minutos para a instância E, menos de 1 minuto para F e menos de 7 minutos para G.

No caso das instâncias de grande porte de horizonte de planejamento anual, geradas na presente pesquisa, a estratégia também resultou em soluções rápidas e de boa qualidade. A instância H, com 128 produtos, foi resolvida em menos de 4 minutos; e a instância I, com 201 produtos, em

menos de 20 minutos. Nos dois casos, os melhores tempos foram obtidos no experimento III (RF-B). E nos dois casos, os tempos foram ainda melhores com a definição da partição correspondente ao período de um mês. No caso da instância H, o tempo de solução foi abaixo de 3 minutos e na instância I, abaixo de 5 minutos.

O gráfico da Figura 4 representa a redução de tempo obtida nos quatro experimentos heurísticos (II, III, IV e V), na comparação com a solução do modelo (experimento I). A maior redução foi obtida junto à instância de maior porte, instância I. A solução ótima leva mais de uma hora, e o Experimento III (RF-B), menos de 5 minutos.

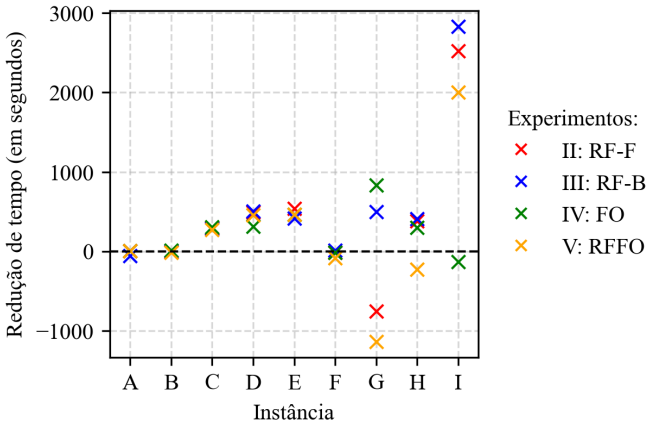



Figura 4: Redução do tempo computacional das heurísticas em relação ao Experimento I. Fonte: autores

### 6.3. Teste de Complexidade

Considerando que a aplicação do modelo matemático obteve, para todas as nove instâncias avaliadas, soluções consideradas ótimas segundo o limite de gap estabelecido e dentro do limite de tempo de 4 horas, nesta subseção são analisadas duas versões ainda mais desafiadoras da instância de maior porte, instância I. O objetivo é avaliar a capacidade da abordagem heurística em lidar com instâncias de maior complexidade, para as quais o solver não é capaz de obter a solução ótima dentro do limite de tempo estabelecido.

Estas duas versões da instância I foram chamadas $I_b$ e $I_c$. Elas foram obtidas impondo um corte de 2% na capacidade total de horas trabalhadas, por linha, por período na instância I, reduzindo assim a margem para planejamento. A instância $I_c$, além do corte de capacidade, possui o limite ao fracionamento de lotes elevado de 1 para 2, em relação a instância I, por linha, por período, o que aumenta o espaço de busca de soluções.

A Tabela 4 apresenta os valores de tempos de solução e função objetivo retornados para essas instâncias pelo modelo matemático e pela melhor heurística, RFFO.

Tabela 4: Soluções das instâncias I e suas versões $I_b$ e $I_c$.

| **Inst.** | | **I (M)** | **V (RFFO)** |
|---|---|---|---|
| I | F.O. | 32.965.676 | 32.966.144 |
| | tempo (s) | 3990,4 | 1985,7 |
| $I_b$ | F.O. | – | 32.967.663 |
| | tempo (s) | 14400* | 1449,3 |
| $I_c$ | F.O. | – | 32.966.951 |
| | tempo (s) | 14400* | 2093,5 |

* sem solução no tempo limite de 4 horas. Fonte: autores

O modelo não encontrou solução factível no tempo limite de 4 horas para nenhuma das duas instâncias. Já o experimento V – a combinação das heurísticas *relax and fix* e *fix and optimize* – retornou soluções tanto para $I_b$ como para $I_c$, em cerca de 24 e 35 minutos, respectivamente. Observamos que os valores encontrados para a função objetivo ficam apenas 0,6% e 0,3% acima da solução ótima da instância I. As soluções retornadas pela heurística foram utilizadas como solução inicial do modelo. Nesse experimento verificamos em questão de segundo tratar-se de solução com gap menor que 0,01%, o que sugere serem soluções ótimas. Esse experimento computacional demonstra a importância e a efetividade das heurísticas na solução do problema.

## 7. Conclusão

No presente artigo foram pesquisadas MIP-heurísticas do tipo *relax and fix* e *fix and optimize* na solução do problema de dimensionamento de lotes de produção em máquinas paralelas com fracionamento limitado de uma fabricante de grande porte de eletrodomésticos.

Nos experimentos computacionais, foram utilizadas seis instâncias obtidas de Bergamini et al. (2021) e três instâncias geradas no escopo desta pesquisa. Para as instâncias consideradas inicialmente, foram obtidas soluções de boa qualidade, incluindo os casos com horizontes de planejamento mais longos, que ainda não haviam sido resolvidos na literatura científica relacionada. Adicionalmente, foram avaliadas duas versões ainda mais restritivas da instância de maior porte.

Além da avaliação do desempenho computacional, a análise da solução obtida permitiu observar a estrutura da programação da produção, considerando a distribuição dos produtos entre as linhas e os períodos do horizonte de planejamento. Na instância A, verificou-se maior utilização das linhas destinadas às lavadoras, que representam aproximadamente 51% da demanda total em unidades, bem como maior ocorrência de fracionamentos. O gráfico de Gantt evidencia a relação entre a distribuição da demanda, a utilização da capacidade das linhas e a necessidade de fracionamento dos lotes.

Em termos de desempenho computacional, a solução obtida pelo modelo de otimização linear inteiro misto foi obtida com tempo médio de 832,1 segundos, enquanto soluções inteiras factíveis foram encontradas em tempos ainda menores, variando de 286,7 segundos (*relax and fix*, estratégia *backward*) a 638,7 segundos (*relax and fix* com *fix and optimize*).

A combinação das heurísticas *relax and fix forward* com *fix and optimize* (RFFO) produziu os menores gaps para a maioria das instâncias — 6 de 9 delas. Ainda assim, os demais experimentos também apresentaram soluções de alta qualidade: gaps inferiores a 0,01% foram obtidos pelas heurísticas *relax and fix forward* (RF-F) e *relax and fix backward* (RF-B), enquanto a heurística *fix and optimize* (FO), com solução inicial fornecida pelo CPLEX, apresentou gap médio de 0,2703%.

O teste computacional com duas versões ($I_b$ e $I_c$) mais restritivas da instância I de grande porte, reforçou a efetividade das MIP-heurísticas em resolver instâncias de maior dificuldade computacional. O modelo matemático não encontrou solução factível dentro do limite de quatro horas, enquanto a estratégia RFFO obteve soluções para as instâncias $I_b$ e $I_c$ em aproximadamente 24 e 35 minutos, respectivamente. As soluções da heurística inseridas no modelo sugerem que essas soluções são soluções ótimas, uma vez que chegaram rapidamente ao gap limite de 0,01%, mostrando que a abordagem permanece capaz de produzir soluções de boa qualidade mesmo diante do aumento da dificuldade do problema.

Como perspectivas futuras desta pesquisa está a investigação de uma solução integrada deste problema de dimensionamento de lotes com seu sequenciamento.

***Agradecimentos.*** Este trabalho foi feito com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - (CAPES) - Código de Financiamento 001; Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), processo 315874/2021-0; e Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processos 2023/08977–5 e 2022/05803-3.

**Referências**

Agência Brasil. *Brasil se torna o segundo maior fabricante mundial de ar-condicionado*, 2025a. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/economia/noticia/2025-03/brasil-se-torna-o-segundo-maior-fabricante-mundial-de-ar-condicionado.

Agência Brasil. *Expectativa da indústria eletroeletrônica é de retração neste semestre*, 2025b. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/economia/noticia/2025-06/expectativa-da-industria-eletroeletronica-e-retracao-neste-semestre.

Araujo, K. A. G., Birgin, E. G., Kawamura, M. S., e Ronconi, D. P. Relax-and-fix heuristics applied to a real-world lot sizing and scheduling problem in the personal care consumer goods industry. *Operations Research Forum*, v. 4, p. 47, 2023.

Arenales, M., Morabito, R., Armentano, V., e Yanasse, H. *Pesquisa Operacional: Para cursos de engenharia*. Rio de Janeiro: Elsevier2 edition, 2015.

Bergamini, F. P., Ribeiro, C. M., Munari, P., e Ferreira, D. Production planning with parallel lines and limited batch splitting: mathematical model and a case study in the white goods sector. *Journal of the Operational Research Society*, v. 73, n. 10, p. 2216–2227, 2021.

Bitran, G. R. e Yanasse, H. H. Computational complexity of the capacitated lot size problem. *Management Science*, v. 28, n. 10, p. 1174–1186, 1982.

Boutarfa, Y., Senoussi, A., Brahimi, N., e Aouam, T. Integration and substitution in hybrid manufacturing and refurbishing systems. *International Journal of Production Economics*, v. 274, p. 109308, 2024.

Carvalho, D. M. e Nascimento, M. C. V. Hybrid matheuristics to solve the integrated lot sizing and scheduling problem on parallel machines with sequence-dependent and non-triangular setup. *European Journal of Operational Research*, v. 296, n. 1, p. 158–173, 2022.

Chiara, M. D. *Queda nas vendas frustra indústria de eletroeletrônicos, que aposta em tv para 'salvar' ano de copa*, 2026. Disponível em: https://www.estadao.com.br/economia/vendas-industria-eletroeletronicos-juros-elevados-eletros/.

De Smet, N., Minner, S., Aghezzaf, E.-H., e Desmet, B. A linearisation approach to the stochastic dynamic capacitated lotsizing problem with sequence-dependent changeovers. *International Journal of Production Research*, v. 58, n. 16, p. 4980–5005, 2020.

Dillenberger, C., Escudero, L. F., Wollensak, A., e Zhang, W. On practical resource allocation for production planning and scheduling with period overlapping setups. *European Journal of Operational Research*, v. 75, n. 2, p. 275–286, 1994.

Drexl, A. e Kimms, A. Lot sizing and scheduling: survey and extensions. *European Journal of Operational Research*, v. 99, n. 2, p. 221–235, 1997.

Ferreira, D., Morabito, R., e Rangel, S. Solution approaches for the soft drink integrated production lot sizing and scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, v. 196, n. 2, p. 697–706, 2009. ISSN 03772217http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2008.03.035.

Ferreira, D., Morabito, R., e Rangel, S. Relax and fix heuristics to solve one-stage one-machine lot-scheduling models for small-scale soft drink plants. *Computers and Operations Research*, v. 37, n. 4, p. 684–691, 2010. ISSN 03050548.

França, R. L. M., Apolinário, L. A., Silva, V. S. d., Costa, L., e Kramer, H. H. Combining relax-and-fix and fix-and-optimize approaches to solve the multi-item capacitated lot-sizing problem with unrelated parallel machines. *Computers & Operations Research*, v. 193, p. 107520, 2026. ISSN 0305-0548https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054826001383.

Friske, M. W., Buriol, L. S., e Camponogara, E. A relax-and-fix and fix-and-optimize algorithm for a Maritime Inventory Routing Problem. *Computers & Operations Research*, v. 137, p. 105520, 2022.

Hillier, F. S. e Lieberman, G. J. *Introduction to Operations Research*. Nova York: McGraw-Hill Education10 edition, 2015.

IBGE. *Síntese de indicadores sociais: uma análise das condições de vida da população brasileira: 2024*. 54, IBGERio de Janeiro, 2024.

Joncour, C., Kritter, J., Michel, S., e Schepler, X. Generalized Relax-and-Fix heuristic. *Computers & Operations Research*, v. 149, p. 106038, 2023.

Larroche, F., Bellenguez, O., e Massonnet, G. Clustering-based solution approach for a capacitated lot-sizing problem on parallel machines with sequence-dependent setups*. *International Journal of Production Research*, v. 60, n. 21, p. 6573–6596, 2022.

Luo, D., Guan, Z., Ding, L., Fang, W., e Zhu, H. A Data-Driven Methodology for Hierarchical Production Planning with LSTM-Q Network-Based Demand Forecast. *Symmetry*, v. 17, n. 5, p. 655, 2025. Publisher: Multidisciplinary Digital Publishing Institute.

Mesa, J. *Heurística para dimensionamento de lotes com fracionamento limitado*, 2026. Disponível em: https://github.com/JoaoMesa/heuristica-dimensionamento-lotes-fracionamento-limitado.

Noble-Ramos, V. M., Ferreira, D., Alem, D., e Morabito, R. A critical review of mip models for lot-sizing and scheduling in the beverage industry. *Computers and Industrial Engineering*, v. 205, p. 111151, 2025. ISSN 0360-8352https://doi.org/10.1016/j.cie.2025.111151.

Pochet, Y. e Wolsey, L. A. *Production planning by mixed integer programming*. New York: Springer Science & Business Media, 2006.

Santos, A. M. M. M., Souza, A. J., e Costa, C. S. *Bens de consumo: linha branca*. , Gerência Setorial de Indústria Automotiva e Bens de Consumo Duráveis do BNDES, 1995.

Santos, M. P., Cunha, J. O., e Prata, B. d. A. Formulações e métodos heurísticos para o problema de dimensionamento de lotes com retorno. *Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento*, v. 19, p. 1–22, 2025.

Silva, D. M. e Mateus, G. R. A Mixed-Integer Programming Formulation and Heuristics for an Integrated Production Planning and Scheduling Problem. In: Di Gaspero, L., Festa, P., Nakib, A., e Pavone, M. (ee.), *Metaheuristics*. Cham. Springer International Publishing, 2023. p. 290–305.

Silva, D. M. e Mateus, G. R. Capacitated lot-sizing and scheduling in hybrid flow shop environments: Model, reformulation, and mip heuristics. *Computers & Industrial Engineering*, v. 217, p. 112042, 2026. ISSN 0360-8352https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360835226002433.

Villas Boas, B. E., Camargo, V. C. B., e Morabito, R. Modeling and mip-heuristics for the general lotsizing and scheduling problem with process configuration selection. *Pesquisa Operacional*, v. 41, p. e200000, 2021.