

MAXIMIZAÇÃO DA PRODUÇÃO AGRÍCOLA COM CUSTO EM INSUMOS FIXO¹

Sergio Drumond Ventura^{a*}, Angel Ramon Sanchez Delgado^a

^aInstituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática,
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro – UFRRJ, Seropédica-RJ, Brasil

Recebido 27/01/2022, aceito 04/06/2022

RESUMO

A área de Pesquisa Operacional sem dúvida continua representado uma valiosa ferramenta no planejamento agrícola onde procura-se a máxima produção e/ou a máxima receita líquida de um conjunto de culturas a serem desenvolvidas. Neste trabalho, acrescentamos ao modelo de maximização da produção uma restrição adicional quadrática para que custos dos insumos (água-nitrogênio) se mantivessem fixos. O resultado é um modelo de programação não-linear, que devido às boas condições de diferenciabilidade da função objetivo e das restrições, nos permitiram apresentar um procedimento computacional baseado em uma hibridez entre as metodologias barreira logarítmica e Lagrange. Na implementação computacional, realizamos distintos ensaios numéricos utilizando informações conhecidas na literatura para as culturas: alface, aveia, cebola e melão. Os resultados obtidos mostraram um bom comportamento da metodologia híbrida proposta para os dados considerados.

Palavras-chave: Forma biquadrática, Barreira logarítmica, Multiplicador de Lagrange, Custo fixo.

ABSTRACT

The area of Operations Research undoubtedly continues to represent a valuable tool in agricultural planning where where we search for maximum production and/or maximum net income from a set of crops to be developed. In this work, we added to the production maximization an additional quadratic constraint so that input costs (water-nitrogen) remained fixed. The result is a non-linear programming model, which due to the good conditions of differentiability of the objective function and constraints, allowed us to present a computational procedure based on a hybrid between the logarithmic barrier and Lagrange methodologies. At computational implementation, we performed different numerical tests using information known in the literature for the crops: lettuce, oatmeal, onion and melon. The results obtained showed a good behavior of the hybrid methodology proposed for the data considered.

Keywords: Quadratic form, Logarithmic barrier, Lagrange multiplier, Fixed cost.

* Autor para correspondência. E-mail: ventura@ufrrj.br
DOI: 10.4322/PODes.2022.007

¹Todos os autores assumem a responsabilidade pelo conteúdo do artigo.

1. Introdução

Um problema de interesse na pesquisa operacional para o desenvolvimento agrícola (agronegócio), é conhecermos a máxima produção e/ou receita líquida que pode ser gerada pela lavoura de um conjunto de culturas, quando impomos um limite fixo no gasto dos insumos. Matematicamente, buscamos maximizar uma função de produção (ou função de resposta) de uma determinada cultura, em relação a determinados insumos (por exemplo; lâmina de água e dose de nitrogênio), dentro de um conjunto de viabilidade. A água e o nitrogênio são fundamentais para o desenvolvimento das culturas agrícolas. Quando correlacionadas com a produção obtida, obtemos a função de produção água-nitrogênio-cultura.

Entendemos por função de produção de uma cultura agrícola como aquela que expressa a relação física entre as quantidades utilizadas de certo conjunto de insumos e as quantidades físicas máximas que se podem obter do produto, para uma dada tecnologia usada. O emprego das funções de produção na análise dos resultados de experiências agrícolas, está bastante difundido (Mousinho et al. (2003); Frizzone e Andrade Júnio (2005); Monteiro et al. (2006); Silva et al. (2008); Carvalho et al. (2009); Delgado et al. (2010); Teodoro et al. (2013)).

No trabalho de Mousinho et al. (2003), estudou-se o efeito da água, do nitrogênio e da interação destes fatores sobre o rendimento econômico e quadrático da melancia. Já em Frizzone e Andrade Júnio (2005), procurou-se maximizar a produção e/ou a receita líquida em relação quadrática dos insumos água-nitrogênio, e com limitações hídricas e da terra. Em Monteiro et al. (2006), objetivou-se estudar linearmente o efeito da adubação orgânica e manejo de irrigação e fertilização na produção do melão amarelo. Em Silva et al. (2008), mostrou-se interesse na determinação da lâmina de irrigação e nível de adubação nitrogenada, que maximizam a produção comercial da alface americana na região sul mineira.

Em Carvalho et al. (2009) e Delgado et al. (2010), apresentou-se a incursão do método de pontos interiores (Bertsekas (2004)) na procura da máxima produção de determinada cultura em relação aos insumos limitados água-nitrogênio. Em Teodoro et al. (2013), avaliaram-se as relações econômicas e hídricas da produção de cana-de-açúcar, com base nas variáveis meteorológicas, isoquantas de produtividade e adubação nitrogenada.

Na otimização das decisões agrícolas temos que escolher, entre as diferentes políticas de produção, a mais eficiente, em relação às metas e condições de viabilidade (limite de gastos nos insumos). As decisões baseadas no julgamento e na intuição podem ser satisfatórias quando o número de fatores do problema é limitado e suas relações são claras. Porém, em situações onde esse número cresce é necessária a utilização de modelos matemáticos que representem ou simulem condições reais, e a programação matemática (linear e não-linear) tem-se mostrado como um bom instrumento nessa direção (Carvalho et al. (2000); Baio et al. (2004); Ojima e Yamakami (2006); Delgado et al. (2016)).

Em geral, ao produtor agrícola interessa determinar a lâmina de água, dose de nitrogênio e produtividade ótima de cada cultura agrícola, considerando um limite no gasto dos insumos água e nitrogênio. Esse limite é expressado no programa não-linear que representa o problema através de uma restrição quadrática que fixa o capital disponível para tal finalidade. É importante ressaltar que, em nenhum dos trabalhos citados anteriormente, considerou-se esta importante restrição referente ao custo fixo no gasto de insumos.

Nesse trabalho implementamos o modelo computacional que representa o programa não-linear onde se procura maximizar a produção de culturas agrícolas, com a restrição quadrática de só poder gastar nos insumos (água-nitrogênio) um valor fixado pelo produtor. Realizamos então alguns ensaios numéricos com dados conhecidos na literatura, com o propósito de testar a efetividade do procedimento proposto.

2. Material e Métodos

Seja $y(w, n)$ a função analítica não-linear de produção ou resposta de uma determinada cultura ($kg \cdot ha^{-1}$) em relação à lâmina de água w (mm) e dose de nitrogênio n (kg); c_w o custo de uma lâmina de água ($R\$ \cdot mm \cdot ha^{-1}$) e c_n o custo de uma dose de nitrogênio ($R\$ \cdot kg \cdot ha^{-1}$). Supomos que c_0 representa um custo fixo ($R\$ \cdot ha^{-1}$) destinado exclusivamente para cobrir os gastos em insumos água-nitrogênio. Podemos escrever matematicamente o problema que maximiza a produção da cultura em relação à lâmina de água e dose de nitrogênio com restrição nos gastos de insumos, como o problema de programação não-linear:

$$\text{maximizar } y(w, n) := aw^2 + bn^2 + cwn + dw + en + f, \quad (1)$$

sujeito a:

$$h(w, n) := c_w w^2 + c_n n^2 = c_0, \quad (2)$$

$$w, n \geq 0, \quad (3)$$

onde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, com $a < 0$ e $4ab - c^2 > 0$, além de $c_w, c_n, c_0 \in \mathbb{R}_+$. Note que no problema (1)–(3) acima estamos considerando que a função que rege o gasto em insumos $h(w, n)$ é uma forma biquadrática nas variáveis w e n . Mais ainda, a função objetivo $y(w, n)$ é uma função estritamente côncava. Assim, como o conjunto de viabilidade $S := \{(w, n) \in \mathbb{R}_+^2 : h(w, n) = c_0\}$ é um conjunto convexo, $y(w, n)$ alcança seu máximo na curva S . Observe que a restrição $h(w, n) = c_0$ impõe quanto exatamente é permitido gastar no que respeita a insumos utilizados na lavoura de determinada cultura.

A metodologia aqui utilizada para a resolução do problema acima, pode ser vista como uma hibridez entre o método barreira logarítmica e o método de Lagrange Bertsekas (2004). Funciona da seguinte maneira: para cada $\mu > 0$ fixo, associamos ao problema acima a função $\varphi_\mu(w, n) := y(w, n) + \mu \ln w + \mu \ln n$ que inclui as restrições de não-negatividade das variáveis w e n na função objetivo. Dessa maneira, consideramos o problema:

$$\text{maximizar } \varphi_\mu(w, n), \quad (4)$$

sujeito a:

$$h(w, n) = c_0. \quad (5)$$

Em seguida, consideramos o Lagrangeano associado ao problema acima, dado por:

$$L_\mu(w, n) := \varphi_\mu(w, n) + \lambda h(w, n), \quad (6)$$

onde λ representa o multiplicador de Lagrange associado à restrição $h(w, n) = c_0$. Agora iterativamente resolvemos os problemas irrestritos:

$$\text{maximizar } L_\mu(w, n, \lambda), \quad (7)$$

para cada $\mu > 0$. Pelas condições de primeira ordem, (w, n, λ) representa uma solução ótima do problema acima se, e somente se:

$$\nabla L_\mu(w, n, \lambda) = \begin{pmatrix} 2aw + cn + d + \frac{\mu}{w} - 2c_w w \lambda \\ 2bn + cw + e + \frac{\mu}{n} - 2c_n n \lambda \\ h(w, n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Fazendo: $z_w := \frac{\mu}{w}$ e $z_n := \frac{\mu}{n}$, a equação (8) pode ser escrita como:

$$h(w, n) = 0 \quad (9)$$

$$2aw + cn + d + z_w - 2c_w w \lambda = -d \quad (10)$$

$$cw + 2bn + e + z_n - 2c_n n \lambda = -e \quad (11)$$

$$z_w w = \mu \quad (12)$$

$$z_n n = \mu, \quad (13)$$

onde $w, n, z_w, z_n, \lambda > 0$. As equações (9)–(13) representam um sistema de equações não-lineares que procuramos resolver utilizando o método de Newton, isto é, onde inicialmente procuramos um vetor direção $(\Delta w, \Delta n, \Delta z_w, \Delta z_n, \Delta \lambda)$, tal que:

$$h(w + \Delta w, n + \Delta n) = 0 \quad (14)$$

$$2a(w + \Delta w) + c(n + \Delta n) + (z_w + \Delta z_w) - 2c_w(w + \Delta w)(\lambda + \Delta \lambda) = -d \quad (15)$$

$$2b(n + \Delta n) + c(w + \Delta w) + (z_n + \Delta z_n) - 2c_n(n + \Delta n)(\lambda + \Delta \lambda) = -e \quad (16)$$

$$(z_w + \Delta z_w)(w + \Delta w) = \mu \quad (17)$$

$$(z_n + \Delta z_n)(n + \Delta n) = \mu. \quad (18)$$

Este sistema pode ser escrito como:

$$c_w w \Delta w + c_n n \Delta n = \theta_1 \quad (19)$$

$$2(a - c_w \lambda) \Delta w + c \Delta n + \Delta z_w - 2c_w w \Delta \lambda = \theta_2 \quad (20)$$

$$2(b - c_n \lambda) \Delta n + c \Delta w + \Delta z_n - 2c_n n \Delta \lambda = \theta_3 \quad (21)$$

$$z_w \Delta w + w \Delta z_w = \theta_4 \quad (22)$$

$$z_n \Delta n + n \Delta z_n = \theta_5, \quad (23)$$

onde:

$$\theta_1 := -\frac{h(w, n)}{2} \quad (24)$$

$$\theta_2 := -d - 2aw - cn - z_w + 2c_w w \lambda \quad (25)$$

$$\theta_3 := -e - 2bn - cw - z_n + 2c_n n \lambda \quad (26)$$

$$\theta_4 := \mu - z_w w \quad (27)$$

$$\theta_5 := \mu - z_n n. \quad (28)$$

No algoritmo 1 a seguir, o pseudocódigo do procedimento iterativo que propusemos para resolver (1)–(3), como também a explicação de cada passo.

Algoritmo 1: Procedimento proposto em pseudocódigo

Entrada: $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, com $a < 0$ e $4ab - c^2 > 0$, além de $c_w, c_n, c_0 \in \mathbb{R}_+$,
 $w, n, z_w, z_n, \lambda > 0$, $\tau, \alpha, \varepsilon_i \in (0, 1)$, para $i = 0, 1, 2$;

1 enquanto não achar o ótimo faça

2 $\sigma_0 \leftarrow |h(w, n)|$;

3 $\sigma_1 \leftarrow \frac{|2aw + cn + z_w - 2c_w w \lambda|}{|d| + 1}$;

4 $\sigma_2 \leftarrow \frac{|2bn + cw + z_n - 2c_n n \lambda|}{|e| + 1}$;

5 $\mu \leftarrow \frac{\tau}{2} \cdot (z_w w + z_n n)$;

6 **se** $\mu < 10^{-4}$ e $\sigma_0 < \varepsilon_0$ e $\sigma_1 < \varepsilon_1$ e $\sigma_2 < \varepsilon_2$ **então** pare ! Ótimo encontrado ;

7 **senão**

8 Calcular $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$;

9 Achar $(\Delta w, \Delta n, \Delta z_w, \Delta z_n, \Delta \lambda)$ tal que o sistema (14–18) seja satisfeito;

10 $\beta_p^w \leftarrow \frac{1}{\max\{1, -\frac{\Delta w}{\alpha w}\}}$; $\beta_p^n \leftarrow \frac{1}{\max\{1, -\frac{\Delta n}{\alpha n}\}}$;

11 $\beta_d^w \leftarrow \frac{1}{\max\{1, -\frac{\Delta z_w}{\alpha z_w}\}}$; $\beta_d^n \leftarrow \frac{1}{\max\{1, -\frac{\Delta z_n}{\alpha z_n}\}}$;

12 $\beta_d^\lambda \leftarrow \frac{1}{\max\{1, -\frac{\Delta \lambda}{\alpha \lambda}\}}$;

13 $w \leftarrow w + \beta_p^w \Delta w$;

14 $n \leftarrow n + \beta_p^n \Delta n$;

15 $z_w \leftarrow z_w + \beta_d^w \Delta z_w$;

16 $z_n \leftarrow z_n + \beta_d^n \Delta z_n$;

17 $\lambda \leftarrow \lambda + \beta_d^\lambda \Delta \lambda$;

Primeiramente, na entrada de dados os coeficientes de cada função de produção devem satisfazer $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, com $a < 0$ e $ab - c^2 > 0$. Desse modo, fica garantido que cada função é estritamente côncava. No passo 1, enquanto não achamos uma solução ótima e considerando que estamos partindo de uma solução inicial estritamente positiva, mas inviável (w, n) , nos passos 2, 3 e 4, calculamos as magnitudes ou graus de viabilidade de (w, n) através dos parâmetros σ_0, σ_1 e σ_2 . Isto permite saber quão inviável se encontra a solução iterada. Já no passo 5 examinamos a condição das folgas complementares de otimalidade através do parâmetro barreira logarítmica (μ). No passo 6 examinamos se $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ e μ se encontram suficientemente pequenos, de modo a podermos declarar otimalidade da solução atual. Caso contrário (passo 7), calculamos o lado direito $(\theta_1, \dots, \theta_5)^T$ (passo 8) do sistema (19)–(23), e em seguida calculamos a direção de avanço de Newton $(\Delta w, \Delta n, \Delta z_w, \Delta z_n, \Delta \lambda)$ (passo 9). Nos passos 10, 11 e 12 determinamos os chamados tamanhos de passos primal-dual: $\beta_p^w, \beta_p^n, \beta_d^w, \beta_d^n, \beta_d^\lambda$, que garantiram a não-negatividade de cada iterado. Por exemplo, se $w > 0, \alpha \in (0, 1)$ e

$$\beta_p^w \leftarrow \frac{1}{\max\{1, -\frac{\Delta w}{\alpha w}\}}, \tag{29}$$

então o novo iterado satisfaz $w + \beta_p^w \Delta w > 0$. De fato, basta observar que se $-\frac{\Delta w}{\alpha w} > 1$, então $w + \beta_p^w \Delta w = w - \alpha w = (1 - \alpha)w > 0$. Por outro lado, se $-\frac{\Delta w}{\alpha w} < 1$, então $\frac{\Delta w}{\alpha w} > -1$ e assim $\Delta w > -\alpha w > -w$ (posto que $0 < \alpha < 1$ e $w > 0$). Portanto, $w + \beta_p^w \Delta w > 0$. Finalmente nas linhas 13–17, atualizamos a solução.

3. Resultados e Discussão

Para testar computacionalmente o procedimento, realizamos vários ensaios numéricos utilizando informações conhecidas na literatura. A Tabela 1 apresenta de forma analítica as funções de produção das culturas: Alface (Silva et al. (2008)), Aveia (Frizzone et al. (1995)), Cebola (Baptestini (2013)) e Melão (Monteiro et al. (2006)).

Tabela 1: Funções respostas ou de produção em formas biquadráticas nas variáveis w e n para as culturas: Alface, Aveia, Cebola e Melão.

Culturas	Função de produção ($kg \cdot ha^{-1}$)
Alface	$y(w, n) = -1,042w^2 - 0,04563n^2 + 0,1564wn + 388,1w - 6,02n - 12,49$
Aveia	$y(w, n) = -5,6 \cdot 10^{-5}w^2 - 5,1 \cdot 10^{-5}n^2 + 3,6 \cdot 10^{-2}w + 1,6 \cdot 10^{-2}n$
Cebola	$y(w, n) = -2 \cdot 10^{-4}w^2 - 2 \cdot 10^{-4}n^2 + 3,28 \cdot 10^{-1}w + 9,07 \cdot 10^{-2}n$
Melão	$y(w, n) = -0,05781w^2 - 0,07612n^2 + 70,77509w + 34,16737n$

Fonte: Alface (Silva et al. (2008)), Aveia (Frizzone et al. (1995)), Cebola (Baptestini (2013)) e Melão (Monteiro et al. (2006)).

Na Tabela 2 apresentamos os custos de uma lâmina de água (c_w) e de uma dose de nitrogênio (c_n), para cada cultura.

Tabela 2: Custo de água e custo de nitrogênio para cada cultura considerada.

Culturas	c_w ($R\$ \cdot mm \cdot ha^{-1}$)	c_n ($R\$ \cdot kg \cdot ha^{-1}$)
Alface	0,44	2,09
Aveia	0,08	0,42
Cebola	0,025	1,2
Melão	0,134	2,33

Fonte: Alface (Silva et al. (2008)), Aveia (Frizzone et al. (1995)), Cebola (Baptestini (2013)) e Melão (Monteiro et al. (2006)).

Procurando conhecer as variações da lâmina de água, dose de nitrogênio e produtividade de cada cultura quando consideramos aumentos nos insumos da ordem de 25%, 50% e 75%, realizamos vários ensaios numéricos com o procedimento apresentado. O primeiro utilizando os dados das Tabelas 1 e 2. Em seguida, realizamos três ensaios, considerando aumentos de 25%, 50% e 75%, nos custos de água e de nitrogênio da Tabela 2, e apresentados nas Tabelas 3, 4 e 5.

Tabela 3: Custo da lâmina de água e custo de dose de nitrogênio com 25% de aumento para cada cultura.

Culturas	$c_w \uparrow 25\%$ ($R\$ \cdot mm \cdot ha^{-1}$)	$c_n \uparrow 25\%$ ($R\$ \cdot kg \cdot ha^{-1}$)
Alface	0,55	2,61
Aveia	0,1	0,52
Cebola	0,031	1,5
Melão	0,167	2,91

Fonte: Elaborada pelos autores.

Em relação ao parâmetro c_0 (custo fixo para gastos nos insumos água-nitrogênio) consideramos 20.940,22 $R\$ \cdot ha^{-1}$ para Alface, 3.174,8 $R\$ \cdot ha^{-1}$ para Aveia, 6.102,174 $R\$ \cdot ha^{-1}$ para Cebola e 5.000 $R\$ \cdot ha^{-1}$ para Melão.

Note que podemos utilizar o procedimento anteriormente descrito para maximizar a receita líquida gerada por cada cultura, isto é, permite resolvermos o programa não-linear:

Tabela 4: Custo da lâmina de água e custo de dose de nitrogênio com 50% de aumento para cada cultura.

Culturas	$c_w \uparrow 50\%$ ($R\$ \cdot mm \cdot ha^{-1}$)	$c_n \uparrow 50\%$ ($R\$ \cdot kg \cdot ha^{-1}$)
Alface	0,66	3,13
Aveia	0,12	0,63
Cebola	0,037	1,8
Melão	0,2	3,5

Fonte: Elaborada pelos autores.

Tabela 5: Custo da lâmina de água e custo de dose de nitrogênio com 75% de aumento para cada cultura.

Culturas	$c_w \uparrow 75\%$ ($R\$ \cdot mm \cdot ha^{-1}$)	$c_n \uparrow 75\%$ ($R\$ \cdot kg \cdot ha^{-1}$)
Alface	0,77	3,66
Aveia	0,14	0,74
Cebola	0,04	2,1
Melão	0,23	4,07

Fonte: Elaborada pelos autores.

$$\text{maximizar } RL(w, n) := p_c \cdot y(w, n) - \bar{c}, \quad (30)$$

sujeito a:

$$h(w, c) = c_0, \quad (31)$$

$$w, n \geq 0, \quad (32)$$

onde p_c representa o preço no mercado da cultura e um custo da lavoura (mão de obra, maquinaria, entre outras), independente dos custos dos insumos.

Na Tabela 6 mostramos os resultados referentes à lâmina de água, dose de nitrogênio e produtividade ótima, obtidos com os dados registrados nas Tabelas 1 e 2.

Tabela 6: Solução ótima (w^*, n^*) e valor ótimo da produção ($kg \cdot ha^{-1}$).

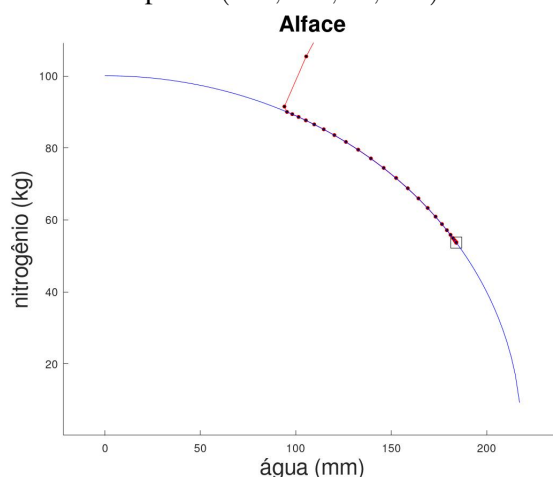
Culturas	w (mm)	n (kg)	$y(w, n)$
Alface	184,075	53,719	37.211,790
Aveia	186,649	30,384	5.207,523
Cebola	816,942	192,217	144.522,738
Melão	190,663	7,433	11.642,467

Fonte: Elaborada pelos autores.

Nesta Tabela, podemos observar entre as culturas agrícolas consideradas, a Cebola foi a que obteve a maior produção. Para isso, ela consumiu a maior lâmina de água e dose de nitrogênio entre o resto das culturas. Também, as lâminas de água ótimas, salvo a Cebola, mantiveram valores ótimos muito próximos. Em relação as doses de nitrogênio, o Melão teve a menor dose ótima, 7,433 kg.

Podemos mostrar graficamente a trajetória de pontos gerados pelo procedimento implementado, convergindo à solução ótima do problema, para cada cultura considerada. A Figura 1 por exemplo, mostra para a cultura Alface, a sequência de pontos gerados pelo procedimento implementado, e convergindo à solução ótima (184,075; 53,719). Note que esta solução ótima satisfaz a equação da cônica: $h(w, n) = 0,77w^2 + 3,66n^2 = 20.940,22$.

Figura 1: Sequência de pontos gerados pelo procedimento para Alface, convergindo ao ponto (184, 075; 53, 719).



Fonte: Elaborada pelos autores.

Na Tabela 7 mostramos os resultados ótimos obtidos quando consideramos um 25% de aumento nos preços da lâmina de água e dose de nitrogênio.

Tabela 7: Solução ótima (w^* , n^*) e valor ótimo da produção ($kg \cdot ha^{-1}$), com 25% de aumento no custo da lâmina de água e dose de nitrogênio .

Culturas	w (mm)	n (kg)	$y(w, n)$
Alface	179,259	35,360	36.795,971
Aveia	168,572	25,189	4.847,954
Cebola	813,514	163,992	143.966,999
Melão	170,709	6,385	10.612,371

Fonte: Elaborada pelos autores.

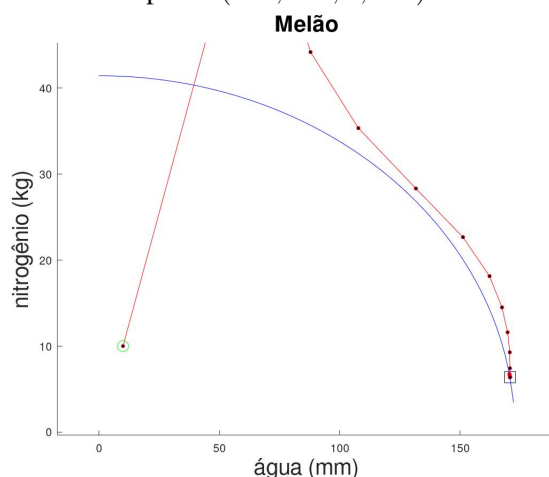
Novamente a Cebola aparece como a cultura com maior valor na lâmina de água ótima (813,514 mm), nada distante do valor obtido na Tabela 6 (816,942 mm), enquanto o valor ótimo da dose de nitrogênio obtido na Tabela 7 teve uma queda significativa de 28,23 kg em relação à Tabela 6. No resto das culturas, podemos observar que os valores obtidos em relação a lâminas de água e doses de nitrogênio ótimos, se mantém próximos dos obtidos na Tabela 6. Mais ainda: em geral, quando temos um aumento de 25% nos custos dos insumos, podemos ter uma queda na produtividade da cultura de aproximadamente 1.000 kg por hectare.

Na Figura 2 mostramos para a cultura do Melão, a sequência de pontos gerados pelo procedimento implementado e convergindo à solução ótima (170,709; 6,385). Note que esta solução ótima satisfaz a equação da cônica: $h(w, n) = 0,23w^2 + 4,07n^2 = 5.000$.

Na Tabela 8 mostramos os resultados ótimos obtidos quando consideramos um 50% de aumento nos preços da lâmina de água e dose de nitrogênio. Nesta Tabela podemos observar que com tal aumento nos custos de insumos, a cultura da Cebola teve uma alta na dose de nitrogênio de 21,75 kg, e mesmo assim, a produtividade ótima resultou a mesma que obtivemos quando consideramos 25% de aumento nos custos dos insumos. É interessante notar, que para o resto das culturas, apesar de estarmos considerando um aumento maior nos custos dos insumos, os valores correspondentes a lâmina de água e dose de nitrogênio ótimas tiveram menores valores, o que reflete nas quedas das produtividades ótimas.

Na Figura 3 mostramos para a cultura da Cebola, a sequência de pontos gerados pelo procedimento implementado convergindo à solução ótima (809,974; 142,242). Note que esta

Figura 2: Sequência de pontos gerados pelo procedimento para Melão, convergindo ao ponto (170, 709; 6, 385).



Fonte: Elaborada pelos autores.

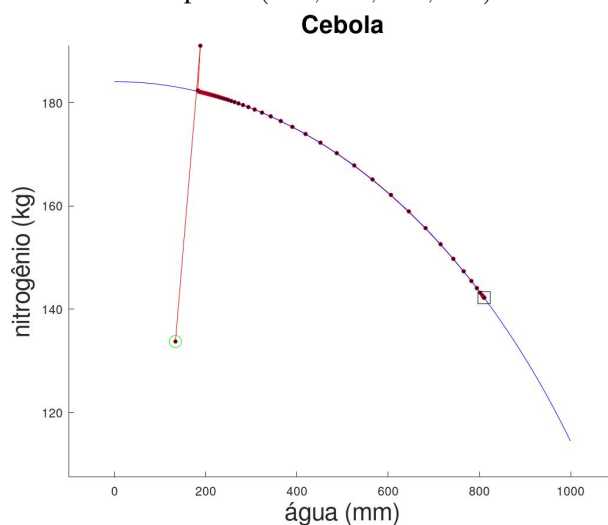
Tabela 8: Solução ótima (w^*, n^*) e valor ótimo da produção ($kg \cdot ha^{-1}$), com 50% de aumento no custo da lâmina de água e dose de nitrogênio .

Culturas	w (mm)	n (kg)	$y(w, n)$
Alface	172,120	21,037	36.337,212
Aveia	154,814	21,774	4.555
Cebola	809,974	142,242	143.314
Melão	155,942	5,662	9.822,053

Fonte: Elaborada pelos autores.

solução ótima satisfaz a equação da cônica: $h(w, n) = 0.04w^2 + 2.10n^2 = 6.102, 174$.

Figura 3: Sequência de pontos gerados pelo procedimento para Cebola, convergindo ao ponto (809, 974; 142, 242).



Fonte: Elaborada pelos autores.

Finalmente na Tabela 9 encontramos os resultados do último ensaio numérico realizado, e onde consideramos um aumento de 75% nos custos de insumos. Em comparação com os

resultados da Tabela 8, a Alface teve uma queda de quase 50% na dose ótima de nitrogênio, e de 40 kg, em comparação com o resultado ótimo registrado na Tabela 6. Observando as Tabelas 6, 7, 8 e 9, se faz claro que para cada cultura, na medida em que tenhamos aumento nos custos dos insumos (25%, 50% e 75%), teremos equilibradamente menores lâmina de água, dose de nitrogênio e produtividade ótima.

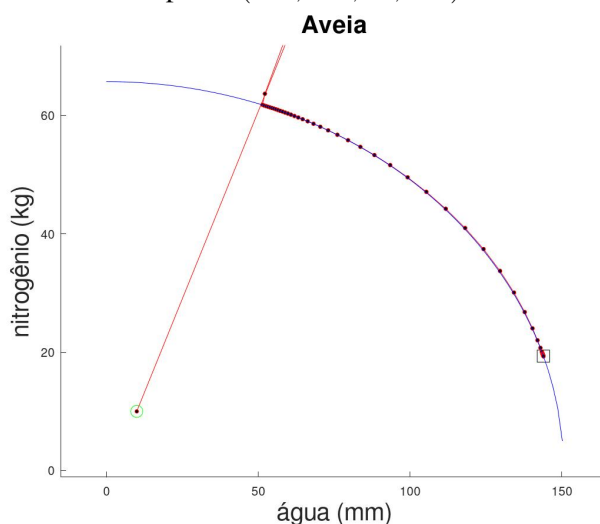
Tabela 9: Solução ótima (w^* , n^*) e valor ótimo da produção ($kg \cdot ha^{-1}$), com 75% de aumento no custo da lâmina de água e dose de nitrogênio .

Culturas	w (mm)	n (kg)	$y(w, n)$
Alface	162,712	12,310	35.781,145
Aveia	143,920	19,341	4.311,592
Cebola	806,221	124,565	142.636,790
Melão	144,445	5,128	9.190,215

Fonte: Elaborada pelos autores.

Na Figura 4 mostramos para a cultura da Aveia, a sequência de pontos gerados pelo procedimento implementado convergindo à solução ótima (143, 920; 19, 341). Note que esta solução ótima satisfaz a equação da cônica: $h(w, n) = 0.14w^2 + 0.74n^2 = 3.174, 8$.

Figura 4: Sequência de pontos gerados pelo procedimento para Aveia, convergindo ao ponto (143, 920; 19, 341).



Fonte: Elaborada pelos autores.

4. Conclusões

Apresentamos um procedimento computacional iterativo para resolver o programa de programação não-linear (1)–(3), associado ao problema de se procurar maximizar a produtividade de uma cultura agrícola em relação aos insumos lâmina de água e dose de nitrogênio. Nesse problema, acrescentamos a restrição de uma função quadrática de custo dos insumos (água-nitrogênio), de forma a manter os custos fixos. É importante destacar que esta condição não forma parte dos modelos apresentados por Silva et al. (2008), Frizzone et al. (1995), Baptestini (2013) e Monteiro et al. (2006), para a maximização da produção das culturas: Alface, Aveia, Cebola e Melão, respectivamente, e por isso que não foram estabelecidas comparações com os resultados aqui obtidos. O procedimento baseado na hibridéz entre as metodologias barreira logarítmica e Lagrange, mostrou convergência e consistência numérica em cada ensaio realizado para os dados

considerados, embora sejam necessárias novas experiências para podermos declarar o procedimento computacionalmente robusto.

Referências

Baio, F. H. R., Antuniassi, U. R., Balastreire, L. A., e Caixeta Filho, J. V. Modelo de programação linear para seleção de pulverizadores agrícolas de barras. *Engenharia Agrícola*, v. 24, n. 2, p. 355–363, 2004.

Baptestini, J. C. M. *Produção de cebola submetida a diferentes lâminas de água e doses de nitrogênio com adubação molibdica*. 89f. Tese de Doutorado. (Doutorado em Engenharia Agrícola) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa-MG, 2013.

Bertsekas, D. *Nonlinear Programming*. Belmont: Athena Scientific, 2004.

Carvalho, D. F., Delgado, A. R. S., Oliveira, R. F., Silva, W. A., e Forte, V. L. Maximização da produção e da receita agrícola com limitações de água e nitrogênio utilizando método de pontos interiores. *Engenharia Agrícola*, v. 29, n. 2, p. 321–327, 2009.

Carvalho, D. F., Soares, A. A., Ribeiro, C. A. A. S., Sedyama, G. C., e Pruski, F. F. Otimização do uso da água no perímetro irrigado do gorotuba, utilizando-se a técnica da programação linear. *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, v. 4, n. 2, p. 203–209, 2000.

Delgado, A. R. S., Duarte, W. S., Lima, V. N., e de Carvalho, D. F. Modelagem matemática para otimização da produção e renda de melão e melancia em função de lâminas de água e doses de nitrogênio. *Irriga*, v. 15, n. 1, p. 1–9, 2010.

Delgado, A. R. S., Ventura, S. D., e Rodrigues, P. C. P. Otimização da receita líquida com produção agrícola por área irrigada limitada. *Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento*, v. 8, n. 2, p. 92–108, 2016.

Frizzone, J. A. e Andrade Júnior, A. S. *Planejamento de irrigação: análise de decisão de investimento*. 627p., EMBRAPA Informação Tecnológica, 2005.

Frizzone, J. A., Teodoro, R. E. F., Pereira, A. S., e Botrel, T. A. Lâmina de água e doses de nitrogênio na produção de aveia (avena sativa l.) para forragem. *Scientia Agrícola*, v. 52, n. 3, p. 578–586, 1995.

Monteiro, R. O. C., Colares, D. S., Costa, R. N. T., Leão, M. C. S., e de Aguiar, J. V. Função de resposta do meloeiro a diferentes lâminas de irrigação e doses de nitrogênio. *Horticultura Brasileira*, v. 24, n. 4, p. 455–459, 2006.

Mousinho, F. E. P., Costa, R. N. T., Souza, F., e Gomes Filho, R. R. G. Função de resposta da melancia à aplicação de água e nitrogênio para as condições edafoclimáticas de fortaleza, ce. *Irriga*, v. 8, n. 3, p. 264–272, 2003.

Ojima, A. L. R. O. e Yamakami, A. Modelo de programação quadrática para análise da movimentação logística e comercialização da soja brasileira. *Engenharia Agrícola*, v. 26, n. 2, p. 552–560, 2006.

Silva, P. A. M., Pereira, G. M., Reis, R. P., Lima, L. A., e Taveira, J. H. S. Função de resposta da alface americana aos níveis de água e adubação nitrogenada. *Ciência Agrotécnica*, v. 32, n. 4, p. 1266–1271, 2008.

Teodoro, I. T., Dantas Neto, J. D., Souza, J. L., Lyra, G. B., Brito, K. S., Sá, L. A., Santos, M. A. L., e Sarmento, P. L. V. S. Isoquantas de produtividade da cana-de-açúcar em função de níveis de irrigação e adubação nitrogenada. *Irriga*, v. 18, n. 3, p. 387–401, 2013.