

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE EMPACOTAMENTO ORTOGONAL COM DIFERENTES MALHAS E RESTRIÇÕES REAIS¹

Oliviana Xavier do Nascimento^a, Jéssica Gabriela de Almeida Cunha^{a*},
Thiago Alves de Queiroz^a

^aUnidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia
Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão – UFG, Catalão-GO, Brasil

Resumo

Este trabalho lida com o Problema de Empacotamento Ortogonal nas versões bi- e tridimensional, que é um problema de decisão. Para resolver tais versões, utiliza-se um modelo de programação por restrições, em que se consideram restrições de problemas reais de empacotamento (balanceamento de carga e ordem de entrega). Investiga-se o impacto no refinamento da malha discreta de pontos usada para empacotar os itens, comparando a malha unitária com as de *discretization points* e *reduced raster points*. Deste modo, analisa-se a influência dos tipos de malhas e das restrições na resolução do problema. Experimentos computacionais em instâncias da literatura mostram que o tipo da malha interfere no tempo de resolução, de forma que a malha com os *reduced raster*, que é a mais refinada, permitiu reduzir significativamente o tempo de resolução das instâncias.

Palavras-chave: Problema de Empacotamento Ortogonal, Programação por Restrições, Restrições Práticas, *Discretization Points*, *Reduced Raster Points*.

Abstract

This work is about the Orthogonal Packing Problem in its two- and three-dimensional versions. In order to solve such versions, it is considered a constraint programming model, in which constraints of real-life packing problems as load balance and multi-drop are considered as well. It is investigated the impact caused when refining the grid of points used to arrange items comparing the classical grid with the ones over discretization points and reduced raster points. Therefore, it is analyzed how these grids and constraints under consideration influence the resolution of the problem. Computational experiments on instances from the literature show that the type of grid influences in the runtime, so the grid with the reduced raster points, which is more refined, allowed to significantly reduce the runtime of the instances.

Keywords: Orthogonal Packing Problem, Constraint Programming, Practical Constraints, Discretization Points, Reduced Raster Points.

*Autor para correspondência: e-mail: jessicagabriela.1201@gmail.com

¹Todos os autores assumem a responsabilidade pelo conteúdo do artigo.

1. Introdução

Problemas de empacotamento visam, de um modo geral, arranjar um conjunto de itens dentro de recipientes, observando uma função objetivo e levando em consideração algumas restrições básicas que devem ser atendidas: respeitar as dimensões do recipiente e não ter itens se sobrepondo. O estudo desses tipos de problemas auxilia empresas a otimizarem os processos de armazenamento de carga, carregamento em caminhões ou contêineres e de transporte das mercadorias, de modo a diminuir os custos associados e aumentar a competitividade no mercado (Bortfeldt e Wäscher, 2013).

Bischoff e Ratcliff (1995) discutiram sobre outras restrições práticas que tornam o problema de empacotamento mais realista, como por exemplo: orientação (os itens podem ou não ser rotacionados), balanceamento da carga (manter o centro de gravidade do empacotamento em uma determinada região), ordem de entrega (considerar a rota de entrega), empilhamento de itens (respeitar as questões de fragilidade dos itens), separação de itens (certos itens devem ficar separados), limite de peso do recipiente (o veículo tem um limite de peso a ser transportado) e agrupamento de itens (grupos de itens devem ser colocados no mesmo empacotamento).

Problemas de empacotamento podem ser encontrados na literatura com mais de uma dimensão e sendo resolvidos por diferentes abordagens. Um deles é o Problema de Empacotamento Ortogonal (OPP), que não possui função objetivo, apenas restrições. Neste problema, busca-se verificar se itens de um dado conjunto podem ser arranjados dentro de um recipiente, de modo que os itens não se sobreponham e que estejam completamente dentro do recipiente. A resposta esperada é do tipo sim ou não, ou seja, o OPP é um problema de decisão. Para obter uma solução para o OPP, admite-se que os itens são alocados a pontos obtidos pela discretização do recipiente em uma malha. Uma instância para o OPP é composta pelo número de itens e as suas dimensões, bem como as dimensões do recipiente. Assume-se que os itens e o recipiente são objetos com forma regular (retângulos ou paralelepípedos retângulos).

O estudo sobre o OPP é justificado pela sua presença em problemas reais que aparecem em aplicações de empresas e indústrias. Saber se há como acomodar, dentro de um recipiente, todos os itens de um conjunto, ou saber se há como cortar todos os tipos de peças em apenas uma placa, permite decidir sobre o uso de outros recipientes ou placas.

Este trabalho considera o OPP na sua versão bidimensional (2OPP), em que os itens e o recipiente são retângulos, e na tridimensional (3OPP), sendo os itens e o recipiente tratados

como paralelepípedos retângulos (caixas). Além disso, consideram-se as restrições práticas de balanceamento de carga, em que o recipiente possui uma “região de segurança” na qual o centro de gravidade do empacotamento deve estar; e, a restrição de ordem em que a organização dos itens dentro do recipiente atende a ordem dos clientes em uma dada rota conhecida.

Uma vez que o 2OPP e o 3OPP são problemas NP-Completo (Clautiaux *et al.*, 2007), parte-se para a resolução por meio de um modelo de programação por restrições, que costuma ser uma técnica satisfatória para resolver problemas de decisão (Wang *et al.*, 2015). O modelo considera restrições para evitar a sobreposição entre itens e tratar as duas restrições práticas, em que as variáveis de decisão indicam o ponto onde cada item deve ser alocado na malha discreta associada ao recipiente.

Com relação a discretização da malha de pontos, utilizam-se duas formas para refinar a quantidade de pontos existentes, sendo a malha com *discretization points*, descrita por Herz (1972) e Christofides e Whitlock (1977), e a com *reduced raster points*, introduzida por Scheithauer e Terno (1996). O uso de tais malhas é muito importante, pois permite diminuir a quantidade de posições inviáveis que seriam testadas e, assim, colaboram para reduzir o tempo computacional gasto na busca pela solução do problema.

Sendo assim, a próxima seção apresenta um levantamento sucinto das contribuições envolvendo o OPP. Ela também apresenta um levantamento sobre as contribuições envolvendo as restrições de balanceamento de carga e ordem de entrega. Em seguida, o OPP é definido e caracterizado nas suas variantes bi- e tridimensional. As restrições para o problema são apresentadas e discutidas no contexto da programação por restrições. Depois, apresentam-se as formas de discretizar a malha de pontos e o impacto que elas podem gerar durante a resolução do problema. Na sequência, apresenta-se a forma como foram realizados os experimentos numéricos sobre instâncias da literatura, sendo que os experimentos foram divididos conforme a inclusão (ou não) das restrições práticas no problema. Por fim, as conclusões e os direcionamentos para trabalhos futuros são discutidos.

2. Estado da Arte

O 2OPP e o 3OPP já foram abordados em alguns trabalhos da literatura. Martello e Vigo (1998) propuseram um método para resolver o 2OPP em duas etapas: primeiro, opta-se por um procedimento heurístico para verificar se os itens podem ser empacotados no recipiente, ou seja, se o empacotamento é viável. Caso a heurística retorne que o empacotamento é

inviável, executa-se um procedimento que gera todos os padrões existentes para empacotar os itens. Tal procedimento é baseado na estratégia que visa empacotar os itens em posições localizadas mais à esquerda e mais abaixo (*left-most downward*). Os itens são ordenados de forma decrescente com relação ao valor de suas áreas para assim serem empacotados.

Beldiceanu e Carlsson (2001) resolveram o 2OPP por meio de programação por restrições. O método desenvolvido por estes autores busca identificar e “podar” os valores inconsistentes do domínio das variáveis de decisão relacionados às posições onde os itens podem ser empacotados, além de determinar regiões proibidas para o empacotamento. A técnica de determinar regiões proibidas é aplicada na restrição que garante a não sobreposição dos itens e foi considerada a discretização unitária do recipiente.

Pisinger e Sigurd (2007) também utilizaram programação por restrições para resolver o 2OPP. O método desenvolvido pelos autores busca determinar, para cada par de itens i e j , se o item i é empacotado à esquerda, à direita, abaixo ou acima do item j . Uma restrição é associada a cada uma dessas possibilidades. Assim, dois itens são considerados e uma atribuição de valores é gerada e testada. Quando uma atribuição satisfaz ao menos uma das restrições que definem as possibilidades de relações entre os itens, aplicam-se técnicas para propagar a restrição que foi satisfeita e, assim, tornar a busca por uma solução mais eficiente. Tais autores consideraram a discretização unitária do recipiente.

Fekete e Schepers (2004) e Fekete *et al.* (2007) propuseram uma abordagem para problemas de empacotamento ortogonal que é válida tanto para duas quanto para três dimensões, pois se trata de uma abordagem geral. Ela consiste em considerar grafos de intervalos para obter classes de empacotamentos viáveis.

Clautiaux *et al.* (2007) propuseram um método exato para o 2OPP em duas etapas. A primeira etapa consiste em encontrar um conjunto de coordenadas x para empacotar os itens em várias alturas e impõem, por meio de uma restrição, que as fatias pertencentes a um dado item devem ser empacotadas na mesma coordenada x . A segunda etapa do método consiste em encontrar um conjunto de coordenadas y para os itens.

Clautiaux *et al.* (2008) propuseram um método de programações por restrições para o 2OPP que considera um modelo básico com a restrição que garante a não sobreposição dos itens. A esse modelo são propostas outras estratégias a fim de melhorar o seu desempenho. Dentre elas está um modelo baseado em escalonamento de tarefas. Os autores consideraram a discretização unitária do recipiente que vai sendo melhorada pela propagação de novas restrições no modelo.

Belov *et al.* (2009) desenvolveram uma abordagem para resolver problemas de empacotamento ortogonal com duas ou mais dimensões (o que inclui o 2OPP e o 3OPP). A abordagem é baseada em duas relaxações unidimensionais. A primeira consiste em tratar o 2OPP ou o 3OPP como um problema de escalonamento de tarefas com um único recurso (o recurso é geralmente tido como uma máquina) em que as tarefas devem ser processadas sem interrupção. A segunda relaxação consiste em tratar o 2OPP ou 3OPP como um problema de corte unidimensional, em que barras de um único tamanho precisam ser cortadas em pedaços menores. Já Mesyagutov *et al.* (2012a) resolveram o 2OPP através de uma relaxação linear para o problema combinada à técnica de programação por restrições. Tais autores não utilizaram somente a discretização unitária do recipiente. Eles fizeram uso da malha de pontos com os *discretization points*.

Mesyagutov *et al.* (2012b) estenderam para o 3OPP a abordagem desenvolvida por Mesyagutov *et al.* (2012a). Os autores também fizeram a utilização da malha de pontos sobre os *discretization points*, em que novos tipos de ramificação e novas regras de poda foram propostas. A relaxação que considera o 3OPP como um problema de corte unidimensional, tratada em Belov *et al.* (2009), também é investigada pelos autores.

Belov e Rohling (2013) desenvolveram uma abordagem para problemas de empacotamento ortogonal que é válida para duas ou mais dimensões. Neste caso, a abordagem inclui o 2OPP e o 3OPP. Tal abordagem consiste em tratar o problema como sendo de corte unidimensional, em que barras de um único tamanho precisam ser cortadas em pedaços menores, com um procedimento baseado em grafos de intervalo que obtém empacotamentos viáveis. Este procedimento é análogo ao usado por Fekete e Schepers (2004) e Fekete *et al.* (2007). Os autores investigaram as relações existentes entre as informações de não sobreposição, que são obtidas pelo procedimento baseado em grafos de intervalo, com a possibilidade de melhorar a relaxação usada na resolução do problema.

É importante destacar que o 2OPP e o 3OPP aparecem como subproblemas ao considerar o Problema de Roteamento de Veículos com restrições de Empacotamento Bi- e Tridimensional, respectivamente (Iori e Martello, 2013; Hokama *et al.*, 2016). Neste problema, cada rota deve ser viável do ponto de vista de empacotamento geométrico dos itens dos clientes na respectiva rota, o que remete a resolução de uma instância do OPP caso a rota seja conhecida.

Nesse sentido, a inclusão de restrições durante o empacotamento caracteriza variantes do problema de roteamento mais próximas da realidade. Algumas variantes incluem a ordem

de entrega, em que os itens precisam ser organizados dentro do veículo conforme a sequência de clientes visitados, isto é, a retirada dos itens do cliente sendo visitado no momento não pode ser bloqueada por itens de outros clientes a serem visitados posteriormente na rota. Resultados envolvendo essa restrição foram obtidos, por exemplo, em Junqueira *et al.* (2012), para o problema de carregamento de contêineres, em Queiroz e Miyazawa (2013), para o problema de empacotamento em faixa, e em Hokama *et al.* (2016), para o problema integrado de roteamento de veículos com restrições de empacotamento.

Outra restrição envolve o balanceamento da carga para que o veículo possa operar de forma segura durante o transporte, isto é, o centro de gravidade do empacotamento deve ficar dentro de uma região de segurança para que, durante o transporte, o veículo não venha a tombar, por exemplo. Essa restrição também é comum no transporte efetuado por aviões pelo efeito direto no consumo de combustível e estabilidade da aeronave. Um levantamento de trabalhos que consideraram a restrição de balanceamento de carga foi feito por Junqueira e Queiroz (2015).

Diante das propostas da literatura, a contribuição deste trabalho está em analisar a influência dos tipos de discretização da malha de pontos sobre o tempo computacional gasto ao usar a programação por restrições como método de solução para o 2OPP e 3OPP. Considera-se também a presença das restrições práticas de balanceamento de carga e ordem de entrega.

3. Descrição do Problema de Empacotamento Ortogonal

O OPP visa decidir se todos os m itens de um conjunto $I = \{1, \dots, m\}$ podem ser empacotados dentro de um recipiente R . Os itens devem ocupar, cada um, posições diferentes do recipiente de forma a evitar a sobreposição e todos os itens devem estar inteiramente contidos dentro do recipiente. Neste problema, considera-se as dimensões do recipiente e dos itens sendo valores inteiros positivos, de modo que se for um valor real, faz-se uma mudança apropriada de escala.

A versão bidimensional do problema (2OPP) considera que cada item i no conjunto I possui largura l_i e comprimento c_i , enquanto o recipiente possui largura L e comprimento C . O sistema de referências se dá em termo dos eixos x e y , que são associados, respectivamente, a largura e ao comprimento dos itens e do recipiente. Assim, se para todo item i de I existe um ponto da malha discreta de R com coordenadas (x_i, y_i) onde o item i é empacotado com seu

canto inferior esquerdo satisfazendo as restrições do problema, diz-se que há uma solução viável.

Na versão tridimensional (3OPP), considera-se também a altura (a_i para os itens e A para o recipiente). O sistema de referência está em termo dos eixos x , y e z , que são associados, respectivamente, a largura, ao comprimento e a altura dos itens e do recipiente. De maneira análoga ao caso bidimensional, se para todo item i de I existe um ponto em R com coordenadas (x_i, y_i, z_i) onde o item i é empacotado com seu canto inferior de trás esquerdo atendendo as restrições do problema, tem-se então uma solução viável. Além disso, considera-se que cada item i possui um número máximo b_i de cópias que podem ser empacotadas no recipiente. As Figuras 1(a) e 1(b) ilustram, respectivamente, item e recipiente com relação ao sistema de referências adotado para os casos bi- e tridimensional.

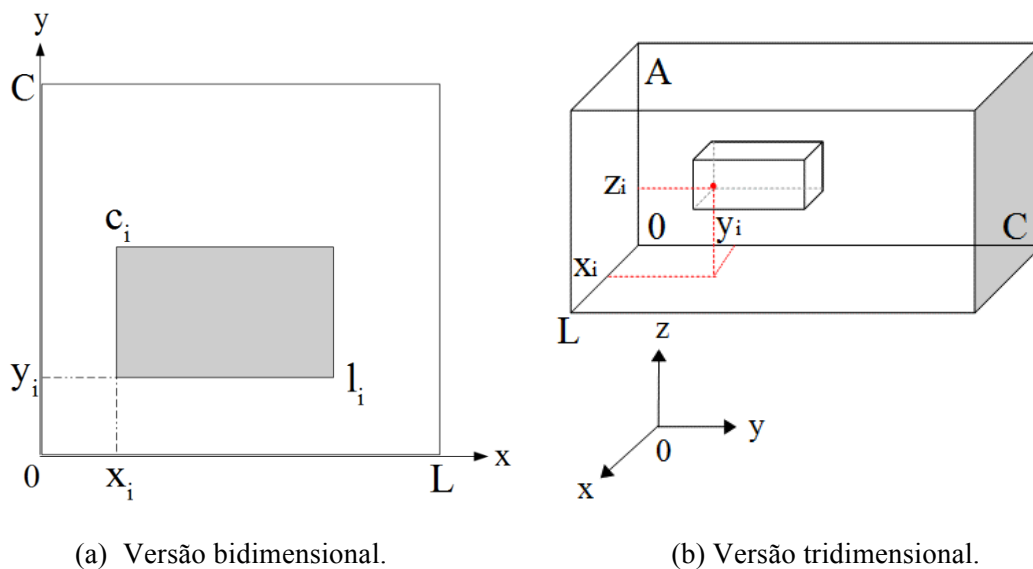


Figura 1 - Representação do empacotamento de um item i em um ponto do recipiente R .

3.1 Restrições para o 2OPP e o 3OPP

As restrições representam relações que são estabelecidas entre as variáveis de decisão do problema. As variáveis de decisão representam, por sua vez, as decisões a serem tomadas, enquanto as restrições limitam os valores que estas variáveis podem assumir. Por exemplo, a condição de que os itens devem ser empacotados no recipiente de modo que eles não se sobreponham é representada por um conjunto de restrições. Estas são chamadas de restrições

de não sobreposição e são consideradas indispensáveis no contexto de problemas de empacotamento.

Existem outras restrições que podem ser consideradas no problema com o objetivo de deixá-lo próximo da realidade. Tais restrições práticas são baseadas, em sua maioria, no fato de que a carga gerada pelo empacotamento será transportada e, assim, aspectos relacionados ao transporte sejam atendidos (Bortfeldt e Wäscher, 2013). Neste caso, busca-se garantir que o empacotamento esteja em uma região segura do recipiente (balanceamento de carga) e facilitar a entrega dos itens, evitando o remanejamento do empacotamento a cada cliente que será visitado numa conhecida rota de entrega (ordem de entrega).

Problemas que buscam atender restrições sem, no entanto, ser relevante o critério de otimização (maximizar ou minimizar uma função) podem ser resolvidos pela técnica de Programação por Restrições (PR). A ideia da PR é buscar por uma atribuição de valores para as variáveis de decisão que atenda a todas as restrições do problema. Visando representar o 2OPP e o 3OPP e as restrições práticas mencionadas, apresenta-se adiante como modelar as restrições de não sobreposição, ordem e balanceamento no paradigma da PR.

As restrições definidas para o 2OPP consideram as seguintes variáveis de decisão:

- X_i , que representa a coordenada do eixo x onde o item i é empacotado com relação a seu canto inferior esquerdo, para todo $i = 1, \dots, m$.
- Y_i , que representa a coordenada do eixo y onde o item i é empacotado com relação a seu canto inferior esquerdo, para todo $i = 1, \dots, m$.

O domínio das variáveis são:

$$Dom(X_i) = \{0, 1, \dots, L - l_i\}. \quad (1)$$

$$Dom(Y_i) = \{0, 1, \dots, C - c_i\}. \quad (2)$$

As restrições definidas para o 3OPP consideram, além de X_i e Y_i , a seguinte variável de decisão:

- Z_i , que representa a coordenada do eixo z onde o item i é empacotado com relação a seu canto inferior de trás esquerdo, para todo $i = 1, \dots, m$.

Assim, o domínio da variável Z_i é definido por:

$$Dom(Z_i) = \{0, 1, \dots, A - a_i\}. \quad (3)$$

Na literatura existem diferentes maneiras de discretizar o recipiente em uma malha de pontos. Sendo esta malha discreta, dependendo do método utilizado, pode-se refinar o domínio das variáveis sem perda da solução ótima. Os métodos empregados neste trabalho para a discretização da malha e conseqüente refino do domínio das variáveis são discutidos logo após apresentar as restrições do OPP.

3.1.1 Restrição de Não Sobreposição

Com relação as restrições de não sobreposição, para cada par de itens i e j , define-se no âmbito do 2OPP, a restrição:

$$X_i + l_i \leq X_j \vee X_j + l_j \leq X_i \vee Y_i + c_i \leq Y_j \vee Y_j + c_j \leq Y_i. \quad (4)$$

A restrição dada por (4), uma vez definida para todos os pares de itens i e j pertencentes ao conjunto I , garante que os itens não se sobreponham uns aos outros. Observe que é suficiente o item i ser posicionado antes ou abaixo do j , ou o contrário, o item j ficar antes ou abaixo do i .

A existência de uma atribuição de valores para as variáveis de decisão do 2OPP que satisfaça as restrições definidas por (4) é suficiente para afirmar que há uma solução viável, permitindo, assim, o empacotamento de todos os itens no recipiente.

O mesmo se estende para o 3OPP com a restrição dada por (5), a qual é definida para todo par de itens i e j e que também considera o eixo z .

$$X_i + l_i \leq X_j \vee X_j + l_j \leq X_i \vee Y_i + c_i \leq Y_j \vee Y_j + c_j \leq Y_i \vee Z_i + a_i \leq Z_j \vee Z_j + a_j \leq Z_i. \quad (5)$$

3.1.2 Restrição de Ordem de Entrega

A restrição de ordem representa o caso em que itens devem ser entregues a diferentes clientes de uma dada rota visando, então, respeitar a ordem de visita aos clientes na rota para não remanejar a carga durante a operação de descarregamento. A ordem é definida conforme a rota já conhecida pelo veículo que transporta o empacotamento (Queiroz e Miyazawa, 2013).

Em geral, para que o empacotamento respeite a ordem de entrega, os itens do cliente de maior ordem (aquele que será visitado por último) devem ser empacotados em coordenadas situadas mais ao fundo do recipiente, enquanto que os itens do cliente de menor ordem (aquele que será visitado primeiro) devem ser empacotados em coordenadas situadas

próximas da entrada do recipiente, que é por onde os itens são retirados. O mesmo acontece para os itens intermediários na ordem de entrega. Esta estratégia permite que os itens de um dado cliente sejam retirados do veículo sem que para isso ocorra um remanejamento interno da carga.

Considere que existem n clientes aos quais os itens devem ser entregues e que $o_i = k$ representa o cliente k ao qual o item i deve ser entregue, em que $k = 1, \dots, n$. O valor k representa a ordem que o cliente ao qual ele se refere deve ser visitado, uma vez que a rota já é conhecida. Então, se o item 1 deve ser entregue ao cliente 2, por exemplo, então tal item será entregue ao segundo cliente da rota de entrega e, portanto, não deve impedir a livre retirada dos itens do primeiro cliente a ser visitado. Neste caso particular, o item 1 possui ordem 2, isto é, $o_1 = 2$.

Assim, a satisfação da ordem de entrega e o não remanejamento interno do empacotamento são garantidos pela restrição (6) para o 2OPP, a qual está ilustrada pela Figura 2. Para o 3OPP, tais condições são satisfeitas pela restrição (7), a qual está ilustrada pela Figura 3. Ambas restrições são definidas para todos os pares de itens i e j tais que o item j deve ser entregue depois do item i ($o_j > o_i$).

O argumento que está sendo negado na restrição (6) representa a região onde o item j não pode ser empacotado, dado que $o_j > o_i$. Então, a negação do argumento impede que o item j seja empacotado na região proibida. Na restrição (7), para o 3OPP, esta região é representada pelo lado direito de (7). A restrição permite que as posições para empacotar os itens sejam atribuídas levando em consideração apenas que eles não devem se sobrepor. Caso algum item j bloqueie a retirada de algum i com $o_j > o_i$, a restrição impõe que o item i seja empacotado acima do item j . Assim, o item i , que vai ser entregue primeiro, pode ser retirado livremente do recipiente, assumindo que a carga é descarregada manualmente da frente para o fundo e de cima para baixo.

$$\neg \left((X_j + l_j > X_i) \wedge \left(\left((Y_j \leq Y_i) \wedge (Y_j + c_j > Y_i) \right) \vee \left((Y_j \geq Y_i) \wedge (Y_i + c_i > Y_j) \right) \right) \right) \quad (6)$$

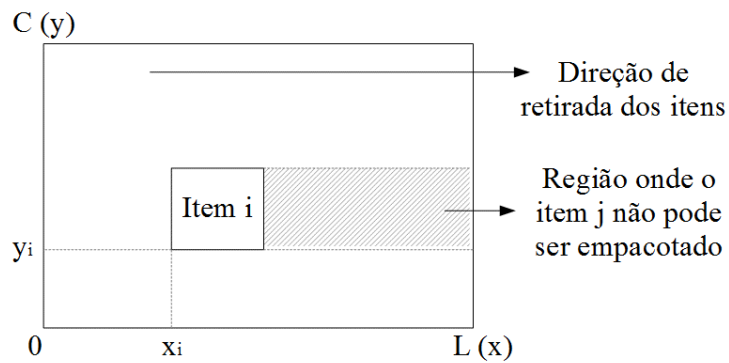


Figura 2 - Representação da restrição de ordem para o 2OPP.

$$\left((X_j + l_j > X_i) \wedge \left((Y_j \leq Y_i) \wedge (Y_j + c_j > Y_i) \right) \vee \left((Y_j \geq Y_i) \wedge (Y_i + c_i > Y_j) \right) \right) \rightarrow (Z_i \geq Z_j + a_j). \quad (7)$$

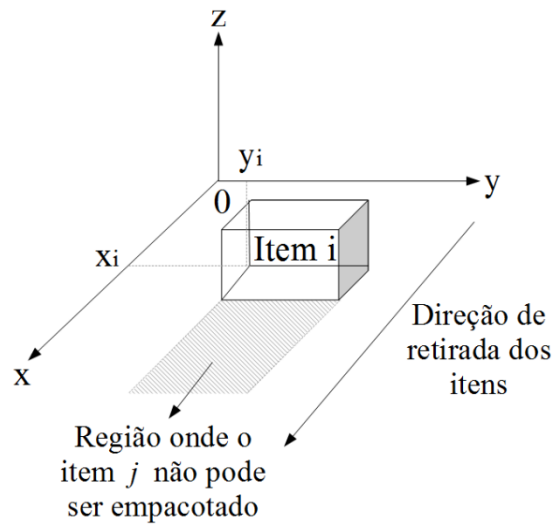


Figura 3 - Representação da restrição de ordem para o 3OPP.

3.1.3 Restrição de Balanceamento de Carga

O balanceamento de carga busca garantir que o centro de gravidade do empacotamento esteja em uma “região segura” dentro do recipiente. A região de segurança é definida como um envelope dentro do recipiente (Queiroz e Miyazawa, 2013).

Em se tratando do 3OPP, este envelope pode ser definido pelos intervalos $[X_{start}, X_{end}]$, $[Y_{start}, Y_{end}]$ e $[Z_{start}, Z_{end}]$. Para o 2OPP, tem-se os intervalos $[X_{start}, X_{end}]$ e $[Y_{start}, Y_{end}]$, sendo ilustrado na Figura 4.

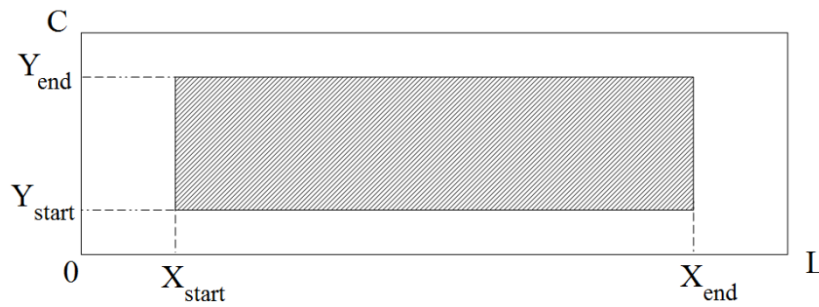


Figura 4 - Exemplo de região de segurança para o 2OPP.

Para garantir que o centro de gravidade do empacotamento esteja dentro da região de segurança do eixo x , isto é, $[X_{start}, X_{end}]$, são definidas as restrições (8) e (9) no caso do 3OPP.

$$\frac{\sum_{i=1}^m (l_i c_i a_i) \left(X_i + \frac{l_i}{2} \right)}{\sum_{i=1}^m l_i c_i a_i} \geq X_{start}. \quad (8)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^m (l_i c_i a_i) \left(X_i + \frac{l_i}{2} \right)}{\sum_{i=1}^m l_i c_i a_i} \leq X_{end}. \quad (9)$$

Restrições análogas a (8) e (9) são consideradas para os eixos y e z , visando garantir que o centro de gravidade do empacotamento esteja dentro dos intervalos de segurança $[Y_{start}, Y_{end}]$ e $[Z_{start}, Z_{end}]$, respectivamente. No caso do 2OPP, considera-se apenas os eixos x e y e as restrições não possuem o termo a_i , apenas $l_i c_i$.

4. Discretização do Recipiente

A fim de determinar uma solução para problemas de empacotamento, os itens podem ser organizados em uma malha de pontos, tal que os itens são atribuídos a pontos dessa malha. A malha é discreta e é obtida com base nas dimensões do recipiente e dos itens disponíveis para o empacotamento. Em geral, quanto mais pontos existir na malha, maior deve ser o domínio das variáveis, o que pode acarretar em maior tempo de resolução (Queiroz e Miyazawa, 2013).

Existem algumas formas de discretizar a malha de pontos associada ao recipiente. O primeiro tipo é a malha comum, a qual contempla todas as coordenadas inteiras possíveis ao longo das dimensões do recipiente, isto é, as coordenadas possuem distância unitária entre si. Considera-se os pontos na malha apenas até a coordenada $L - \min_{1 \leq i \leq m} (l_i)$, ao longo da largura do recipiente (eixo x), e até a coordenada $C - \min_{1 \leq i \leq m} (c_i)$, ao longo do comprimento do

recipiente (eixo y), para o 2OPP. Para o 3OPP, considera-se também os pontos até a coordenada $A - \min_{1 \leq i \leq m}(a_i)$, ao longo da altura do recipiente (eixo z). Observe que não é possível empacotar qualquer item do conjunto I após essas coordenadas, uma vez que extrapola as dimensões do recipiente.

Os conjuntos definidos em (10), (11) e (12) representam, respectivamente, os pontos ao longo da largura (eixo x), ao longo do comprimento (eixo y) e ao longo da altura (eixo z) para o 3OPP. Para o 2OPP, considera-se apenas (10) e (11).

$$X_c = \{p \in \mathbb{Z} | 0 \leq p \leq L - \min_{1 \leq i \leq m}(l_i)\}; \quad (10)$$

$$Y_c = \{q \in \mathbb{Z} | 0 \leq q \leq C - \min_{1 \leq i \leq m}(c_i)\}; \quad (11)$$

$$Z_c = \{r \in \mathbb{Z} | 0 \leq r \leq A - \min_{1 \leq i \leq m}(a_i)\}. \quad (12)$$

A malha total é dada pelo produto cartesiano entre os conjuntos obtidos ao longo das dimensões. Além disso, considera-se que os domínios das variáveis X_i , Y_i e Z_i podem ser, respectivamente, os conjuntos X_c , Y_c e Z_c .

4.1 Discretization Points

Herz (1972) e Christofides e Whitlock (1977) observaram que cada item pode ser empacotado mais a esquerda e mais abaixo possível, até que esteja encostado em outros itens ou nas laterais do recipiente. Desta forma, tais autores introduziram a estratégia de discretização conceituada como *discretization points*, *canonical dissections* ou *normal patterns*.

Essa discretização é feita com base nas combinações das dimensões dos itens e devem obedecer às dimensões do recipiente. Assim como feito para a discretização comum, considera-se apenas as coordenadas até o ponto $L - \min_{1 \leq i \leq m}(l_i)$, ao longo da largura do recipiente, $C - \min_{1 \leq i \leq m}(c_i)$, ao longo do comprimento, e $A - \min_{1 \leq i \leq m}(a_i)$, ao longo da altura. É importante destacar que o uso dos *discretization points* permite eliminar posições redundantes da discretização comum sem que, para tanto, ocorra a perda da solução ótima.

Beasley (1985) desenvolveu uma fórmula que gera os conjuntos de *discretization points* de maneira simples e direta, a saber:

$$X_d = \{p \in \mathbb{Z} | p = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i l_i, 0 \leq p \leq L - \min_{1 \leq i \leq m}(l_i), \text{ com } 0 \leq \varepsilon_i \leq b_i, \varepsilon_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, m\}; \quad (13)$$

$$Y_d = \{q \in \mathbb{Z} | q = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i c_i, 0 \leq q \leq C - \min_{1 \leq i \leq m}(c_i), \text{ com } 0 \leq \varepsilon_i \leq b_i, \varepsilon_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, m\}; \quad (14)$$

$$Z_d = \{r \in \mathbb{Z} | r = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i a_i, 0 \leq r \leq A - \min_{1 \leq i \leq m} (a_i), \text{ com } 0 \leq \varepsilon_i \leq b_i, \varepsilon_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, m\}. \quad (15)$$

Os conjuntos definidos em (13) e (14) referem-se ao problema em sua forma bidimensional. Já (13), (14) e (15) se referem ao problema tridimensional.

4.2 Reduced Raster Points

Derivado da malha de *discretization points* surgiram os chamados *reduced raster points*, sendo desenvolvidos por Scheithauer e Terno (1996). Esta malha refina ainda mais a quantidade de *discretization points*, porém não há garantia de manter a solução ótima, sendo ainda uma questão em aberto na literatura. Por meio de testes computacionais, Birgin *et al.* (2012) e Queiroz *et al.* (2012) verificaram que não há perda de solução ótima ao se utilizar a malha de *reduced raster points*.

A malha com os *reduced raster points* para o 3OPP pode ser obtida por meio de (16), (17) e (18), as quais representam, respectivamente, o conjunto de pontos ao longo da largura (eixo x), ao longo do comprimento (eixo y) e ao longo da altura (eixo z). Para o 2OPP considera-se (16) e (17).

$$X_r = \{(L - p)_x | \forall p \in X_d\} \cup \{0\}, \quad (16)$$

$$Y_r = \{(C - q)_y | \forall q \in Y_d\} \cup \{0\}, \quad (17)$$

$$Z_r = \{(A - r)_z | \forall r \in Z_d\} \cup \{0\}, \quad (18)$$

sendo que $(L - p)_x = \max \{s \in X_d | s \leq L - p\}$, $(C - q)_y = \max \{t \in Y_d | t \leq C - q\}$ e $(A - r)_z = \max \{u \in Z_d | u \leq A - r\}$.

5. Experimentos Computacionais

A codificação do modelo de PR para o 2OPP e o 3OPP, bem como o cálculo das malhas, foram feitos na linguagem de programação C++ e os experimentos ocorreram em um computador com processador Intel Core i5-3570 de 3,4 GHz, 8 GB de memória RAM e sistema operacional Linux Ubuntu 14.04 LTS. Utilizaram-se as classes e bibliotecas do pacote IBM ILOG CPLEX Optimization Studio 12.6.1 (IBM, 2014), em particular o uso do CP Optimizer para a programação por restrições.

As instâncias usadas para o 2OPP foram as mesmas de Clautiaux *et al.* (2008), em que o recipiente possui dimensões dadas por $(L, C) = (20, 20)$ e o número de itens varia de 10 a

23. Para os testes envolvendo o 3OPP, foram utilizadas instâncias de Mesyagutov *et al.* (2012b), as quais possuem 15 itens e o recipiente com dimensões $(L, C, A) = (1000, 1000, 1000)$.

5.1 Casos Investigados

O 2OPP e o 3OPP são resolvidos, primeiramente, considerando apenas a restrição de não sobreposição. Em seguida, são consideradas as restrições de ordem e de balanceamento de carga. Considera-se a adição destas restrições práticas uma por vez e todas juntas, o que resulta nas seguintes possibilidades:

- (i) 2OPP/3OPP sem restrições práticas;
- (ii) 2OPP/3OPP com balanceamento de carga;
- (iii) 2OPP/3OPP com ordem de entrega;
- (iv) 2OPP/3OPP com balanceamento de carga e ordem de entrega.

O domínio das variáveis de decisão pode ser reduzido por meio da utilização da malha de *discretization points* e de *reduced raster points*. Assim, são investigados três casos, que são aplicados nas quatro possibilidades de resolução para o 2OPP e o 3OPP descritas acima. Os casos referem-se a:

- A) Considerar a malha comum;
- B) Considerar a malha de *discretization points*;
- C) Considerar a malha de *reduced raster points*.

As Figuras 5, 6 e 7 esquematizam os três casos investigados para o 2OPP que, por conseguinte, são também estendidos ao 3OPP.

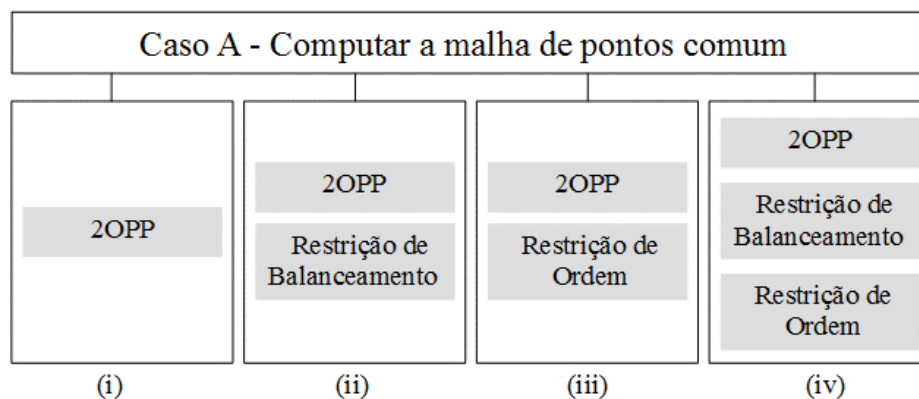


Figura 5 - Caso A - Considerar a malha discretizada de modo comum.

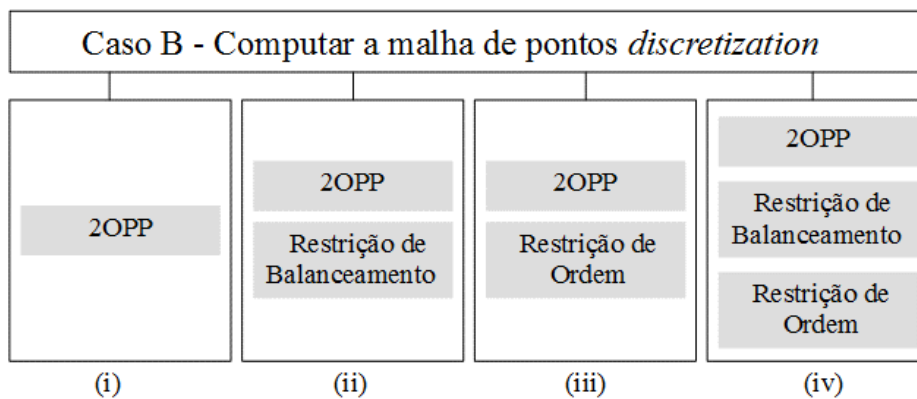


Figura 6 - Caso B - Considerar a malha com os *discretization points*.

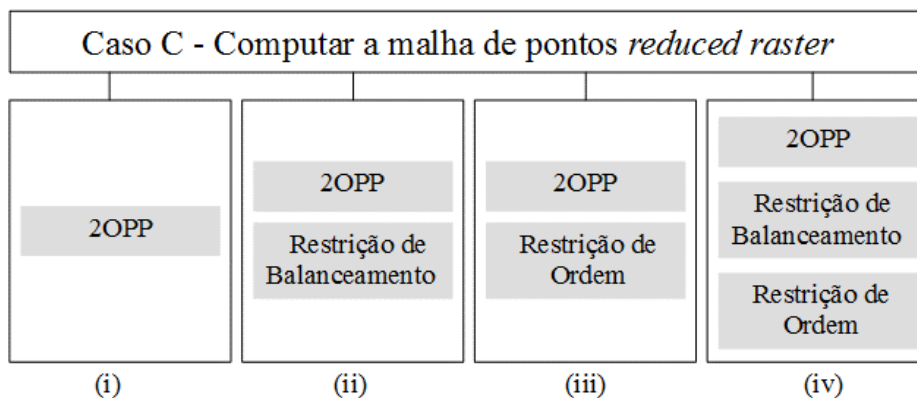


Figura 7 - Caso C - Considerar a malha com os *reduced raster points*

5.2 Resultados

A Tabela 1 traz, para as instâncias do 2OPP, a quantidade de pontos na malha comum, de *discretization points* e de *reduced raster points*, bem como as porcentagens de redução da quantidade de pontos entre os diferentes tipos de discretização.

De acordo com a Tabela 1, nota-se que em média a malha com *discretization points* reduziu a malha comum em 7,78%, enquanto a com *reduced raster points* permitiu reduzir a malha comum em 9,34%. Na comparação entre as malhas de *discretization points* e a de *reduced raster points*, tem-se uma redução, em média, de 1,86%. Observa-se que essas médias de redução são relativamente pequenas. Isto aconteceu, pois na maioria das instâncias há itens com dimensões unitárias. Apesar disso, tem-se no geral que a malha de *reduced raster points* é a mais refinada, com a menor quantidade de pontos, ao comparar com os outros tipos de malha.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

As Tabelas 2 e 3 apresentam, respectivamente, a quantidade de pontos gerada pelos diferentes tipos de discretização para as instâncias do 3OPP e as porcentagens de redução entre elas. É importante destacar que o tempo gasto para obter as malhas em qualquer das situações é desprezível, sendo no pior caso igual a 0,000057 segundos para o 2OPP e 0,001225 segundos para o 3OPP.

Com base nas Tabelas 2 e 3, observa-se que para as instâncias do 3OPP houve uma grande diferença na quantidade de pontos entre os diferentes tipos de discretização da malha. Tem-se que, em média, a malha com *discretization points* reduziu a malha comum em 97,39%. Já a com *reduced raster points* reduziu, em média, a malha comum em 99,94%, e a malha de *discretization points* em 97,86%. Nota-se que a malha de *discretization points* por si só já refinou bastante a quantidade de pontos presente na malha comum e sem que haja perda de generalidade. Mais uma vez, a malha mais refinada é a com os *reduced raster points*, porém não há garantia com relação a perda, ou não, da solução factível.

As Tabelas de 4 a 6 trazem os resultados obtidos para um conjunto de 31 instâncias do 2OPP. Na Tabela 4 são reportados os resultados obtidos para o caso A, no qual é considerada a malha comum. Na Tabela 5 são reportados os resultados obtidos para o caso B, em que se considera o conjunto de *discretization points*. Na Tabela 6 estão os resultados obtidos para o caso C, no qual se considera o conjunto de *reduced raster points*.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Tabela 1: Quantidade de pontos nos diferentes tipos de malha para as instâncias do 2OPP.

Instância	X _c	Y _c	Total comum	X _d	Y _d	Total disc.	X _r	Y _r	Total rast.	Red. (%) disc.-com.	Red. (%) rast.-com.	Red. (%) rast.-disc.
E00N10	20	17	340	20	14	280	20	14	280	17,65	17,65	0,00
00N15	20	19	380	20	18	360	20	18	360	5,26	5,26	0,00
E00N23	20	19	380	20	18	360	20	18	360	5,26	5,26	0,00
E02F17	20	19	380	20	18	360	20	18	360	5,26	5,26	0,00
E02F20	20	19	380	20	18	360	20	18	360	5,26	5,26	0,00
E02F22	20	19	380	20	18	360	20	18	360	5,26	5,26	0,00
E02N20	20	19	380	20	18	360	20	18	360	5,26	5,26	0,00
E03N10	20	19	380	20	18	360	20	18	360	5,26	5,26	0,00
E03N15	20	19	380	20	18	360	20	18	360	5,26	5,26	0,00
E03N16	20	19	380	20	18	360	20	18	360	5,26	5,26	0,00
E03N17	20	19	380	20	18	360	20	18	360	5,26	5,26	0,00
E04F15	20	19	380	20	18	360	20	18	360	5,26	5,26	0,00
E04F17	20	19	380	20	18	360	20	18	360	5,26	5,26	0,00
E04F19	20	19	380	20	18	360	20	18	360	5,26	5,26	0,00
E04F20	20	19	380	20	18	360	20	18	360	5,26	5,26	0,00
E04N15	20	19	380	20	18	360	20	18	360	5,26	5,26	0,00
E04N17	20	19	380	20	18	360	20	18	360	5,26	5,26	0,00
E05F15	20	19	380	20	18	360	20	18	360	5,26	5,26	0,00
E05F18	20	19	380	20	18	360	20	18	360	5,26	5,26	0,00
E05F20	20	19	380	20	18	360	20	18	360	5,26	5,26	0,00
E05N15	20	19	380	20	17	340	20	16	320	10,53	15,79	5,88
E07F15	20	18	360	20	16	320	20	16	320	11,11	11,11	0,00
E07N10	20	19	380	20	16	320	20	14	280	15,79	26,32	12,50
E07N15	20	18	360	20	15	300	20	14	280	16,67	22,22	6,67
E08F15	20	19	380	20	18	360	20	18	360	5,26	5,26	0,00
E10N10	20	18	360	20	14	280	20	12	240	22,22	33,33	14,29
E10N15	20	19	380	20	17	340	20	16	320	10,53	15,79	5,88
E13N10	20	19	380	20	16	320	20	14	280	15,79	26,32	12,50
E13N15	20	19	380	20	18	360	20	18	360	5,26	5,26	0,00
E15N15	20	19	380	20	18	360	20	18	360	5,26	5,26	0,00
E20F15	20	19	380	20	18	360	20	18	360	5,26	5,26	0,00
MÉDIA	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7,78	9,34	1,86
DESVIO PADRÃO	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4,70	7,74	4,11

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Tabela 2: Quantidade de pontos nos diferentes tipos de discretização para as instâncias do 3OPP.

Instância	X _c	Y _c	Z _c	Total comum	X _d	Y _d	Z _d	Total discret.	X _r	Y _r	Z _r	Total raster
R3W38_01	888	932	906	749820096	351	414	270	39234780	110	126	76	1053360
R3W38_02	974	974	951	902190876	323	480	232	35969280	83	140	46	534520
R3W38_03	893	830	913	676706470	275	166	317	14471050	92	51	96	450432
R3W38_04	776	893	878	608425904	97	193	278	5204438	20	49	73	71540
R3W38_05	899	933	883	740631261	237	246	293	17082486	74	45	94	313020
R3W38_06	911	917	858	716762046	213	306	176	11471328	61	94	43	246562
R3W38_07	920	918	896	756725760	219	282	205	12660390	68	72	49	239904
R3W38_08	849	948	925	744488100	202	330	296	19731360	55	94	82	423940
R3W38_09	828	822	911	620041176	127	171	199	4321683	40	54	52	112320
R3W38_10	908	927	907	763436412	292	245	292	20889680	104	57	80	474240
R3W40_01	934	931	913	793902802	334	267	259	23097102	104	88	73	668096
R3W40_02	839	853	891	637659297	102	198	309	6240564	25	56	97	135800
R3W40_03	912	864	901	709959168	255	292	359	26731140	73	94	115	789130
R3W40_04	889	946	865	727459810	307	292	124	11115856	85	63	31	166005
R3W40_05	949	966	962	881898108	394	363	159	22740498	104	73	34	258128
R3W40_06	853	933	905	720243345	252	212	215	11486160	56	61	67	228872
R3W40_07	972	958	931	866924856	442	399	384	67721472	138	113	91	1419054
R3W40_08	852	862	943	692561832	255	253	320	20644800	84	62	78	406224
R3W40_09	844	904	861	656922336	142	253	190	6825940	40	64	53	135680
R3W40_10	916	890	865	705182600	274	290	283	22487180	80	76	93	565440

Analisando os resultados das Tabelas de 4 a 6, observa-se que:

- Nos casos A, B e C, a inserção da restrição de ordem de entrega fez com que a maioria das instâncias, antes dadas como factíveis, passem a ser infactíveis. Assim, 17 das 31 instâncias foram tidas como infactíveis sem a restrição de ordem e somente para uma instância não foi possível encontrar a solução dentro do tempo limite estabelecido. Por outro lado, na presença desta restrição, 29 das 31 instâncias passaram a ser infactíveis.
- Para os casos A e B, o modelo sem considerar nenhuma restrição, resultou no maior dos tempos médios obtidos. Já para o caso C, o maior tempo médio foi obtido ao considerar a restrição de balanceamento de carga.
- A consideração da ordem de entrega não aumentou, para nenhum caso, o tempo médio de solução quando comparado com o tempo médio obtido sem qualquer restrição prática e com o acréscimo da restrição prática de balanceamento.
- A consideração de ambas as restrições práticas, ordem e balanceamento, acarretou no menor tempo médio de resolução quando comparado com a aplicação de cada restrição isolada e sem considerar qualquer uma. Isso ocorre para os três casos.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

- O uso dos *discretization points*, caso B na Tabela 5, mostra que não há muita diferença de tempo com relação ao caso A na Tabela 4, em que se utiliza a malha comum. Houve uma pequena piora no tempo médio de solução para o caso que não se considera restrições práticas. Para os demais casos, em que foram aplicadas as restrições práticas, houve uma melhora no tempo médio de solução.
- O uso dos *reduced raster points*, caso C na tabela 6, permite obter os resultados em um menor tempo computacional quando comparado com o caso A e com o B sem, para tanto, influenciar na solução (factível ou infactível).

Tabela 3: Redução (%) nos pontos entre os diferentes tipos de discretização para o 3OPP.

Instância	Redução (%) Disc. - Comum	Redução (%) Rast. - Comum	Redução (%) Rast. – Disc.
R3W38_01	94,77	99,86	97,32
R3W38_02	96,01	99,94	98,51
R3W38_03	97,86	99,93	96,89
R3W38_04	99,14	99,99	98,63
R3W38_05	97,69	99,96	98,17
R3W38_06	98,40	99,97	97,85
R3W38_07	98,33	99,97	98,11
R3W38_08	97,35	99,94	97,85
R3W38_09	99,30	99,98	97,40
R3W38_10	97,26	99,94	97,73
R3W40_01	97,09	99,92	97,11
R3W40_02	99,02	99,98	97,82
R3W40_03	96,23	99,89	97,05
R3W40_04	98,47	99,98	98,51
R3W40_05	97,42	99,97	98,86
R3W40_06	98,41	99,97	98,01
R3W40_07	92,19	99,84	97,90
R3W40_08	97,02	99,94	98,03
R3W40_09	98,96	99,98	98,01
R3W40_10	96,81	99,92	97,49
MÉDIA	97,39	99,94	97,86
DESVIO PADRÃO	1,64	0,04	0,52

As Tabelas de 7 a 8 apresentam os resultados obtidos para um conjunto de 20 instâncias do 3OPP. Na Tabela 7 são reportados os resultados obtidos para o caso A, no qual é considerado a malha comum, e para o caso B, com os *discretization points*. Por fim, a Tabela 8 traz os resultados para o caso C com a malha de *reduced raster points*.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Tabela 4: Resultados do 2OPP para o caso A.

Instância	Sem restrições práticas		Balanceamento		Ordem		Balanceamento e ordem	
	Solução	Tempo (s)	Solução	Tempo (s)	Solução	Tempo (s)	Solução	Tempo (s)
E00N10	Infactível	0,51	Infactível	0,60	Infactível	0,08	Infactível	0,13
E00N15	Infactível	4,81	Infactível	5,85	Infactível	0,02	Infactível	0,02
E00N23	-	3600*	-	3600*	Infactível	1548,19	Infactível	1272,05
E02F17	Factível	81,75	Factível	27,16	Infactível	0,01	Infactível	0,01
E02F20	Factível	3,86	Factível	1,02	Infactível	24,23	Infactível	27,47
E02F22	Factível	0,28	Factível	0,33	Infactível	0,03	Infactível	0,03
E02N20	Infactível	1,55	Infactível	1,83	Infactível	0,18	Infactível	0,22
E03N10	Infactível	0,08	Infactível	0,07	Infactível	0,02	Infactível	0,01
E03N15	Infactível	7,22	Infactível	17,23	Infactível	0,48	Infactível	0,48
E03N16	Infactível	300,13	Infactível	267,64	Infactível	0,39	Infactível	0,42
E03N17	Infactível	8,05	Infactível	9,26	Infactível	0,38	Infactível	0,33
E04F15	Factível	2,21	Factível	0,85	Infactível	0,43	Infactível	0,51
E04F17	Factível	0,21	Factível	0,22	Factível	0,74	Factível	0,80
E04F19	Factível	3,01	Factível	0,60	Infactível	1201,00	Infactível	755,66
E04F20	Factível	0,66	Factível	2,06	Infactível	0,44	Infactível	0,41
E04N15	Infactível	33,35	Infactível	38,30	Infactível	0,41	Infactível	0,48
E04N17	Infactível	3,00	Infactível	2,17	Infactível	0,00	Infactível	0,01
E05F15	Factível	1,78	Factível	1,63	Infactível	42,23	Infactível	32,37
E05F18	Factível	69,32	Factível	1,46	Infactível	0,46	Infactível	0,45
E05F20	Factível	0,23	Factível	0,43	Infactível	0,25	Infactível	0,26
E05N15	Infactível	163,83	Infactível	213,12	Infactível	0,78	Infactível	0,89
E07F15	Factível	0,35	Factível	0,44	Infactível	0,00	Infactível	0,01
E07N10	Infactível	0,10	Infactível	0,09	Infactível	0,07	Infactível	0,10
E07N15	Infactível	0,41	Infactível	0,43	Infactível	0,01	Infactível	0,01
E08F15	Factível	0,36	Factível	0,29	Infactível	0,24	Infactível	0,24
E10N10	Infactível	0,07	Infactível	0,07	Infactível	0,08	Infactível	0,10
E10N15	Infactível	117,40	Infactível	202,04	Infactível	0,23	Infactível	0,28
E13N10	Infactível	1,14	Infactível	1,42	Infactível	0,16	Infactível	0,23
E13N15	Infactível	10,56	Infactível	14,92	Infactível	0,01	Infactível	0,01
E15N15	Infactível	1,26	Infactível	1,46	Infactível	0,00	Infactível	0,00
E20F15	Factível	0,01	Factível	0,02	Factível	0,08	Factível	0,10
MÉDIA	-	142,50	-	142,36	-	91,02	-	67,55
DESVIO PADRÃO	-	634,34	-	634,81	-	340,06	-	257,12

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Tabela 5: Resultados do 2OPP para o caso B.

Instância	Sem restrições práticas		Balanceamento		Ordem		Balanceamento e ordem	
	Solução	Tempo (s)	Solução	Tempo (s)	Solução	Tempo (s)	Solução	Tempo (s)
E00N10	Infactível	0,56	Infactível	0,62	Infactível	0,08	Infactível	0,12
E00N15	Infactível	4,82	Infactível	5,73	Infactível	0,03	Infactível	0,02
E00N23	-	3600*	-	3600*	Infactível	1477,37	Infactível	1229,05
E02F17	Factível	81,68	Factível	25,85	Infactível	0,01	Infactível	0,00
E02F20	Factível	3,82	Factível	0,96	Infactível	22,48	Infactível	25,10
E02F22	Factível	0,28	Factível	0,30	Infactível	0,03	Infactível	0,05
E02N20	Infactível	1,50	Infactível	1,91	Infactível	0,18	Infactível	0,21
E03N10	Infactível	0,08	Infactível	0,08	Infactível	0,00	Infactível	0,01
E03N15	Infactível	7,19	Infactível	16,58	Infactível	0,41	Infactível	0,46
E03N16	Infactível	298,46	Infactível	254,12	Infactível	0,37	Infactível	0,39
E03N17	Infactível	8,24	Infactível	9,14	Infactível	0,31	Infactível	0,34
E04F15	Factível	2,05	Factível	0,83	Infactível	0,42	Infactível	0,47
E04F17	Factível	0,21	Factível	0,23	Factível	0,69	Factível	0,77
E04F19	Factível	3,09	Factível	0,60	Infactível	1106,66	Infactível	708,71
E04F20	Factível	0,66	Factível	1,98	Infactível	0,38	Infactível	0,44
E04N15	Infactível	34,19	Infactível	37,87	Infactível	0,39	Infactível	0,44
E04N17	Infactível	3,08	Infactível	2,08	Infactível	0,00	Infactível	0,00
E05F15	Factível	1,78	Factível	1,62	Infactível	39,32	Infactível	29,64
E05F18	Factível	70,16	Factível	1,37	Infactível	0,40	Infactível	0,46
E05F20	Factível	0,22	Factível	0,42	Infactível	0,23	Infactível	0,25
E05N15	Infactível	166,84	Infactível	204,46	Infactível	0,70	Infactível	0,84
E07F15	Factível	0,41	Factível	0,44	Infactível	0,00	Infactível	0,01
E07N10	Infactível	0,10	Infactível	0,09	Infactível	0,07	Infactível	0,08
E07N15	Infactível	0,46	Infactível	0,41	Infactível	0,03	Infactível	0,03
E08F15	Factível	0,38	Factível	0,30	Infactível	0,21	Infactível	0,23
E10N10	Infactível	0,08	Infactível	0,09	Infactível	0,10	Infactível	0,10
E10N15	Infactível	117,82	Infactível	196,10	Infactível	0,25	Infactível	0,28
E13N10	Infactível	1,16	Infactível	1,48	Infactível	0,19	Infactível	0,23
E13N15	Infactível	10,75	Infactível	14,45	Infactível	0,00	Infactível	0,01
E15N15	Infactível	1,25	Infactível	1,37	Infactível	0,00	Infactível	0,00
E20F15	Factível	0,03	Factível	0,03	Factível	0,08	Factível	0,09
MÉDIA	-	142,62	-	141,34	-	85,53	-	64,48
DESVIO PADRÃO	-	634,32	-	634,70	-	320,41	-	246,62

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Tabela 6: Resultados do 2OPP para o caso C.

Instância	Sem restrições práticas		Balanceamento		Ordem		Balanceamento e ordem	
	Solução	Tempo (s)	Solução	Tempo (s)	Solução	Tempo (s)	Solução	Tempo (s)
E00N10	Infactível	0,67	Infactível	0,82	Infactível	0,10	Infactível	0,11
E00N15	Infactível	2,89	Infactível	7,63	Infactível	0,02	Infactível	0,03
E00N23	-	3600*	-	3600*	Infactível	874,76	Infactível	712,50
E02F17	Factível	59,61	Factível	34,32	Infactível	0,00	Infactível	0,00
E02F20	Factível	20,98	Factível	3,21	Infactível	8,21	Infactível	9,01
E02F22	Factível	0,32	Factível	0,37	Infactível	0,03	Infactível	0,05
E02N20	Infactível	1,35	Infactível	1,66	Infactível	0,28	Infactível	0,28
E03N10	Infactível	0,07	Infactível	0,07	Infactível	0,00	Infactível	0,01
E03N15	Infactível	9,62	Infactível	15,02	Infactível	0,41	Infactível	0,46
E03N16	Infactível	180,44	Infactível	306,14	Infactível	0,29	Infactível	0,33
E03N17	Infactível	16,35	Infactível	16,03	Infactível	0,35	Infactível	0,39
E04F15	Factível	1,48	Factível	1,82	Infactível	0,35	Infactível	0,40
E04F17	Factível	0,23	Factível	0,23	Factível	0,37	Factível	0,39
E04F19	Factível	0,82	Factível	1,01	Infactível	1360,39	Infactível	743,30
E04F20	Factível	0,66	Factível	1,78	Infactível	0,36	Infactível	0,37
E04N15	Infactível	31,77	Infactível	34,72	Infactível	0,32	Infactível	0,36
E04N17	Infactível	2,96	Infactível	2,41	Infactível	0,01	Infactível	0,00
E05F15	Factível	0,32	Factível	0,28	Infactível	30,69	Infactível	27,87
E05F18	Factível	15,78	Factível	37,39	Infactível	0,46	Infactível	0,50
E05F20	Factível	0,37	Factível	0,17	Infactível	0,23	Infactível	0,23
E05N15	Infactível	152,05	Infactível	224,98	Infactível	0,91	Infactível	1,07
E07F15	Factível	0,07	Factível	0,08	Infactível	0,00	Infactível	0,01
E07N10	Infactível	0,10	Infactível	0,12	Infactível	0,08	Infactível	0,10
E07N15	Infactível	0,44	Infactível	0,25	Infactível	0,01	Infactível	0,03
E08F15	Factível	0,23	Factível	0,54	Infactível	0,33	Infactível	0,32
E10N10	Infactível	0,10	Infactível	0,10	Infactível	0,09	Infactível	0,13
E10N15	Infactível	168,80	Infactível	154,65	Infactível	0,35	Infactível	0,41
E13N10	Infactível	1,27	Infactível	1,58	Infactível	0,15	Infactível	0,19
E13N15	Infactível	9,18	Infactível	13,42	Infactível	0,00	Infactível	0,00
E15N15	Infactível	2,30	Infactível	2,91	Infactível	0,00	Infactível	0,00
E20F15	Factível	0,03	Factível	0,02	Factível	0,10	Factível	0,09
MÉDIA	-	138,11	-	143,99	-	73,54	-	48,35
DESVIO PADRÃO	-	633,95	-	634,75	-	281,08	-	178,57

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Tabela 7: Resultados do 3OPP para os casos A e B.

Instância	Caso A								Caso B							
	Sem restrições práticas		Balanceamento		Ordem		Balanceamento e ordem		Sem restrições práticas		Balanceamento		Ordem		Balanceamento e ordem	
	Solução	Tempo (s)	Solução	Tempo (s)	Solução	Tempo (s)	Solução	Tempo (s)	Solução	Tempo (s)	Solução	Tempo (s)	Solução	Tempo (s)	Solução	Tempo (s)
R3W38_01	Factível	0,11	Factível	0,14	Factível	0,17	Factível	0,44	Factível	0,12	Factível	0,12	Factível	0,19	Factível	0,46
R3W38_02	Factível	0,33	Factível	0,35	Factível	4,42	Factível	2,89	Factível	0,33	Factível	0,35	Factível	4,40	Factível	2,83
R3W38_03	Factível	0,25	Factível	0,33	Factível	0,22	Factível	0,25	Factível	0,28	Factível	0,32	Factível	0,23	Factível	0,25
R3W38_04	Factível	0,15	Factível	0,37	Factível	0,14	Factível	0,14	Factível	0,10	Factível	0,36	Factível	0,15	Factível	0,14
R3W38_05	Factível	0,85	Factível	1,75	Factível	1,05	Factível	1,05	Factível	0,89	Factível	1,78	Factível	1,05	Factível	1,06
R3W38_06	Factível	0,66	Factível	1,44	Factível	0,16	Factível	0,17	Factível	0,62	Factível	1,50	Factível	0,16	Factível	0,16
R3W38_07	Factível	0,35	Factível	1,38	Factível	4,22	Factível	1,82	Factível	0,33	Factível	1,43	Factível	4,07	Factível	1,76
R3W38_08	Factível	0,42	Factível	0,47	Factível	0,25	Factível	0,27	Factível	0,42	Factível	0,51	Factível	0,26	Factível	0,27
R3W38_09	Factível	0,39	Factível	3,40	Factível	2,23	Factível	4,87	Factível	0,41	Factível	3,42	Factível	2,26	Factível	4,78
R3W38_10	Factível	3,14	Factível	1,82	Factível	1,16	Factível	10,37	Factível	3,19	Factível	1,91	Factível	1,16	Factível	10,26
R3W40_01	Factível	0,06	Factível	0,08	Factível	0,44	Factível	0,50	Factível	0,07	Factível	0,07	Factível	0,46	Factível	0,51
R3W40_02	Factível	0,13	Factível	0,38	Factível	1,01	Factível	1,70	Factível	0,12	Factível	0,35	Factível	0,92	Factível	1,62
R3W40_03	Factível	0,07	Factível	0,08	Factível	0,25	Factível	0,27	Factível	0,08	Factível	0,08	Factível	0,25	Factível	0,26
R3W40_04	Factível	0,56	Factível	0,60	Factível	0,35	Factível	0,78	Factível	0,58	Factível	0,60	Factível	0,35	Factível	0,76
R3W40_05	Factível	0,83	Factível	0,37	Factível	0,60	Factível	0,66	Factível	0,82	Factível	0,37	Factível	0,56	Factível	0,62
R3W40_06	Factível	0,50	Factível	0,16	Factível	0,25	Factível	0,26	Factível	0,50	Factível	0,15	Factível	0,23	Factível	0,25
R3W40_07	Factível	0,33	Factível	0,17	Factível	0,44	Factível	0,29	Factível	0,32	Factível	0,17	Factível	0,42	Factível	0,32
R3W40_08	Factível	0,26	Factível	0,64	Factível	0,17	Factível	0,21	Factível	0,24	Factível	0,67	Factível	0,20	Factível	0,20
R3W40_09	Factível	0,44	Factível	0,44	Factível	0,26	Factível	0,45	Factível	0,39	Factível	0,48	Factível	0,26	Factível	0,43
R3W40_10	Factível	0,08	Factível	0,10	Factível	0,23	Factível	0,22	Factível	0,08	Factível	0,12	Factível	0,25	Factível	0,23
MÉDIA	-	0,50	-	0,72	-	0,90	-	1,38	-	0,49	-	0,74	-	0,89	-	1,36
DESVIO PADRÃO	-	0,65	-	0,82	-	1,24	-	2,36	-	0,66	-	0,83	-	1,22	-	2,33

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Tabela 8: Resultados do 3OPP para o caso C.

Instância	Sem restrições práticas		Balanceamento		Ordem		Balanceamento e Ordem	
	Solução	Tempo (s)	Solução	Tempo (s)	Solução	Tempo (s)	Solução	Tempo (s)
R3W38_01	Factível	0,10	Factível	0,10	Factível	0,21	Factível	0,22
R3W38_02	Factível	0,57	Factível	0,33	Factível	2,21	Factível	2,53
R3W38_03	Factível	0,23	Factível	0,23	Factível	0,27	Factível	0,26
R3W38_04	Factível	0,58	Factível	0,66	Factível	0,65	Factível	0,78
R3W38_05	Factível	0,26	Factível	0,30	Factível	0,50	Factível	0,57
R3W38_06	Factível	1,51	Factível	1,10	Factível	0,69	Factível	1,09
R3W38_07	Factível	1,39	Factível	0,55	Factível	0,78	Factível	1,23
R3W38_08	Factível	0,17	Factível	0,17	Factível	0,53	Factível	0,61
R3W38_09	Factível	1,21	Factível	0,82	Factível	0,48	Factível	1,46
R3W38_10	Factível	2,12	Factível	3,54	Factível	3,48	Factível	5,28
R3W40_01	Factível	0,25	Factível	0,23	Factível	0,44	Factível	0,51
R3W40_02	Factível	0,25	Factível	0,25	Factível	0,71	Factível	0,41
R3W40_03	Factível	0,16	Factível	0,21	Factível	0,66	Factível	0,42
R3W40_04	Factível	1,33	Factível	0,66	Factível	1,38	Factível	0,97
R3W40_05	Factível	0,12	Factível	0,84	Factível	0,38	Factível	0,56
R3W40_06	Factível	0,25	Factível	0,69	Factível	0,53	Factível	0,60
R3W40_07	Factível	0,30	Factível	0,14	Factível	0,43	Factível	0,91
R3W40_08	Factível	0,26	Factível	0,35	Factível	0,37	Factível	0,48
R3W40_09	Factível	0,45	Factível	0,16	Factível	0,35	Factível	0,33
R3W40_10	Factível	0,15	Factível	0,14	Factível	0,39	Factível	0,41
MÉDIA	-	0,58	-	0,57	-	0,77	-	0,98
DESVIO PADRÃO	-	0,57	-	0,74	-	0,76	-	1,11

Analisando os resultados nas Tabelas 7 e 8 para o 3OPP, nota-se que:

- A inserção das restrições práticas não trouxe alterações na resposta quanto a factibilidade ou não das instâncias. Os resultados factíveis obtidos sem nenhuma restrição prática se mantiveram factíveis com alguma ou todas as restrições práticas.
- Com o acréscimo da restrição de ordem de entrega houve um pequeno aumento, para os três casos, A, B e C, no tempo médio de resolução quando comparado com o caso em que não há qualquer restrição prática.
- A inserção do balanceamento de carga junto a ordem de entrega resultou no maior dos tempos médios para os casos A, B e C. Comparado com o caso sem restrições práticas,

o aumento no tempo de solução foi de 178% em relação ao caso A, de 174% para o caso B e de 68% para o caso C.

- Ao considerar a utilização dos *discretization points*, caso B na Tabela 7, nota-se que não há diferença relevante de tempo com relação ao caso A, em que se utiliza a malha comum.
- Ao considerar os *reduced raster points*, caso C na Tabela 8, obtém-se os resultados em um menor tempo computacional quando comparado com o caso A, da malha comum, e com o caso B, da *discretization points*, sem influenciar na factibilidade da solução.

6. Conclusões e Direções para Trabalhos Futuros

Neste trabalho foi feito um estudo sobre a influência que o tipo de malha exerce na resolução do Problema de Empacotamento Ortogonal, em suas versões bi- e tridimensional. Este problema visa, basicamente, verificar a viabilidade de empacotamento para um dado conjunto de itens. Foram empregadas as malhas comum, *discretization points* e *reduced raster points*, para restringir o domínio das variáveis de decisão do problema, tal que a resolução ocorreu usando um modelo de programação por restrições. No modelo foram consideradas algumas restrições práticas, caso do balanceamento de carga e a ordem de entrega dos itens.

Experimentos computacionais foram realizados para diferentes tipos de malha, além de considerar: o problema sem restrições práticas; com a inserção do balanceamento de carga; com a inserção da ordem de entrega; e, por fim, com as duas restrições práticas combinadas. Com isso, foi possível observar a consequência do uso de cada tipo de malha e das restrições práticas sobre a factibilidade das instâncias e do tempo de resolução.

A partir dos experimentos, observa-se que o tipo de discretização da malha influencia no tempo para obter a solução sem, no entanto, influenciar na factibilidade da solução. Além disso, é melhor utilizar a malha com *discretization points* do que a malha comum, uma vez que ela requer menos tempo para obter a solução e é sempre garantido não ter perda de solução.

Além disso, a malha com os *reduced raster points* se mostrou a mais eficaz quando comparada com as outras malhas, retornando a mesma solução obtida pelos outros casos, mas requerendo menos tempo computacional. Apesar de não haver perda de solução, ainda não se pode garantir que tal malha é confiável, sendo preciso uma verificação formal.

Outro ponto observado diz respeito a restrição de ordem de entrega. Os experimentos para o 2OPP mostraram que a ordem de entrega torna inviável empacotar todos os itens para a

maioria das instâncias testadas. Já nos experimentos para o 3OPP, a inserção da ordem de entrega não trouxe problemas quanto ao empacotamento de todos os itens. Isto é devido, de um lado, aos tipos de instâncias considerados, que se referem a casos que permitem o empacotamento de todos os itens de maneira que ainda sobre espaço livre no recipiente e, de outro lado, ao fato da altura (terceira dimensão) conceder mais liberdade para a organização dos itens.

Como trabalho futuro, pretende-se investigar outras formas de lidar com a restrição de não sobreposição a fim de apertar ainda mais o domínio das variáveis de decisão e reduzir a região de busca da solução. Também, deve-se investigar outras restrições práticas, como impor um grafo de conflitos para itens que não podem ser carregados no mesmo recipiente e considerar os efeitos da estabilidade da carga durante o descarregamento dos itens.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro recebido da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás (FAPEG) e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Referências

- Beasley, J. E. (1985). Algorithms for unconstrained two-dimensional guillotine cutting. *Journal of the Operational Research Society*, v. 36, n. 4, p. 297-306.
- Beldiceanu, N.; Carlsson, M. (2001). Sweep as a generic pruning technique applied to the non-overlapping rectangles constraint. In: 7th International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming. Paphos, Cyprus: Springer Berlin Heidelberg. p. 377-391.
- Belov, G.; Kartak, V.; Rohling, H.; Scheithauer, G. (2009). One-dimensional relaxations and LP bounds for orthogonal packing. *International Transactions in Operational Research*, v. 16, n. 6, p. 745-766.
- Belov, G.; Rohling, H. (2013). LP bounds in an interval-graph algorithm for orthogonal-packing feasibility. *Operations Research*, v. 61, n. 2, p. 483-497.
- Birgin, E. G.; Lobato, R. D.; Morabito, R. (2012). Generating unconstrained two-dimensional non-guillotine cutting patterns by a recursive partitioning algorithm. *Journal of the Operational Research Society*, v. 63, n. 2, p. 183-200.
- Bischoff, E. E.; Ratcliff, M. S. W. (1995). Issues in the development of approaches to container loading. *Omega*, v. 23, n. 4, p. 377-390.
- Bortfeldt, A.; Wäscher, G. (2013). Constraints in container loading - A state-of-the-art review. *European Journal of Operational Research*, v. 229, n. 1, p. 1-20.

- Christofides, N.; Whitlock, C. (1977). An algorithm for two-dimensional cutting problems. *Operations Research*, v. 25, n. 1, p. 30-44.
- Clautiaux, F.; Carlier, J.; Moukrim, A. (2007). A new exact method for the two-dimensional orthogonal packing problem. *European Journal of Operational Research*, v. 183, n. 3, p. 1196-1211.
- Clautiaux, F.; Jouglet, A.; Carlier, J.; Moukrim, A. (2008). A new constraint programming approach for the orthogonal packing problem. *Computers & Operations Research*, v. 35, n. 3, p. 944-959.
- Fekete, S. P.; Schepers, J. (2004). A combinatorial characterization of higher-dimensional orthogonal packing. *Mathematics of Operations Research*, v. 29, n. 2, p. 353-368.
- Fekete, S. P.; Schepers, J.; Van der Veen, J. C. (2007). An exact algorithm for higher-dimensional orthogonal packing. *Operations Research*, v. 55, n. 3, p. 569-587.
- Herz, J. C. (1972). Recursive computational procedure for two-dimensional stock cutting. *IBM Journal of Research and Development*, v. 16, n. 5, p. 462-469.
- Hokama, P.; Miyazawa, F. K.; Xavier, E. C. (2016). A branch-and-cut approach for the vehicle routing problem with loading constraints. *Expert Systems with Applications*, v. 47, p. 1-13.
- IBM. (2014). ILOG CPLEX Optimization Studio V12.6.1 documentation. Disponível em: <http://www.ibm.com/support/knowledgecenter/SSSA5P_12.6.1/ilog.odms.studio.help/Optimization_Studio/topics/COS_home.html> Acesso em: 22/08/2016.
- Iori, M.; Martello, S. (2013). An annotated bibliography of combined routing and loading problems. *Yugoslav Journal of Operations Research*, v. 23, n. 3, p. 311-326.
- Junqueira, L.; Morabito, R.; Yamashita, D. S. (2012). MIP-based approaches for the container loading problem with multi-drop constraints. *Annals of Operations Research*, v. 199, n. 1, p. 51-75.
- Junqueira, L.; Queiroz, T. A. (2015). Condições de equilíbrio e balanceamento em problemas de empacotamento: levantamento e discussão. In: *Anais do XLVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*. Porto de Galinhas – PE, Brasil. p. 4005-4016.
- Martello, S.; Vigo, D. (1998). Exact solution of the two-dimensional finite bin packing problem. *Management Science*, v. 44, n. 3, p. 388-399.
- Mesyagutov, M.; Scheithauer, G.; Belov, G. (2012a). LP bounds in various constraint programming approaches for orthogonal packing. *Computers & Operations Research*, v. 39, n. 10, p. 2425-2438.
- Mesyagutov, M.; Scheithauer, G.; Belov, G. (2012b). New constraint programming approaches for 3D orthogonal packing. Technische Universität Dresden, Dresden, Germany.
- Pisinger, D.; Sigurd, M. (2007). Using decomposition techniques and constraint programming for solving the two-dimensional bin-packing problem. *INFORMS Journal on Computing*, v. 19, n. 1, p. 36-51.
- Queiroz, T. A.; Miyazawa, F. K. (2013). Two-dimensional strip packing problem with load balancing, load bearing and multi-drop constraints. *International Journal of Production Economics*, v. 145, n. 2, p. 511-530.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Queiroz, T. A.; Miyazawa, F. K.; Wakabayashi, Y.; Xavier, E. C. (2012). Algorithms for 3D guillotine cutting problems: Unbounded knapsack, cutting stock and strip packing. *Computers & Operations Research*, v. 39, n. 2, p. 200-212.

Scheithauer, G.; Terno, J. (1996). The G4-heuristic for the pallet loading problem. *Journal of the Operational Research Society*, v. 47, n. 4, p. 511-522.

Wang, T.; Meskens, N.; Duvivier, D. (2015). Scheduling operating theatres: Mixed integer programming vs. constraint programming. *European Journal of Operational Research*, v. 247, n. 2, p. 401-413.