

O PROBLEMA DE CORTE DE ITENS IRREGULARES: APLICAÇÃO NA INDÚSTRIA DE CORTE DE AVENTAIS E FORROS DE LUVAS¹

Alfredo Rogerio Jorge^a, Leandro Resende Mundim^a, Marina Andretta^{a*},
Luiz Henrique Cherri^a

^a*Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
Universidade de São Paulo – USP, Campus de São Carlos, São Carlos-SP, Brasil*

Resumo

Nos problemas de corte de itens irregulares, os itens devem ser alocados em objetos maiores (recipientes) de forma que estes estejam inteiramente contidos no recipiente e não se sobreponham. Neste trabalho, resolvemos um problema de corte e empacotamento de uma indústria que confecciona aventais e forros de luva, no qual deseja-se alocar uma lista de itens dentro de recipientes retangulares utilizando a menor quantidade de recipientes possível e minimizando o comprimento utilizado em cada recipiente. Para isto, é proposta uma heurística específica para esta aplicação e utilizamos a heurística *Bottom-left* com duas abordagens: discreta e contínua, adaptadas para o corte de aventais e forros de luva, com o objetivo de obter soluções de alta qualidade. Foram realizados experimentos computacionais que comprovaram a eficiência dos métodos de solução presentes neste trabalho. Em média, a taxa de ocupação dos recipientes obtida pelos métodos foi superior a 83%, sendo uma boa solução do ponto de vista da indústria.

Palavras-chave: Problemas de Corte de Itens Irregulares, Heurística, Aplicação.

Abstract

In nesting problems, items must be allocated into larger objects (containers) so that they are fully contained within the container and do not overlap. In this paper, a cutting and packing problem was solved from an industry that manufactures aprons and glove liners, in which it is desired to allocate a list of items in rectangular containers using the least amount of containers possible and minimizing the length used in each container. To do this, a specific heuristic is proposed for this application, as well as the use of the Bottom-left heuristic with two approaches: discrete and continuous, adapted for cutting aprons and glove liners in order to obtain high quality solutions. Computational tests were performed and show the efficiency of the solving methods presented in this paper. On average, the occupancy rate of the containers obtained by the methods was above 83%, which is a good solution from the industry's point of view.

Keywords: Nesting Problems, Heuristics, Application.

*Autor para correspondência: e-mail: andretta@icmc.usp.br

¹Todos os autores assumem a responsabilidade pelo conteúdo do artigo.

1. Introdução

Os problemas de corte e empacotamento buscam determinar um arranjo de objetos pequenos (itens) dentro de objetos maiores (recipientes), obedecendo a certas restrições, e sempre visando melhorar a qualidade da solução sob alguma perspectiva. Estes problemas são de difícil resolução, principalmente pelas restrições de não sobreposição entre os itens. Dentre os problemas de corte e empacotamento, os problemas de corte de itens irregulares (ou *nesting problems*) são os que apresentam uma componente geométrica mais complexa, dado que lidam com itens e/ou recipientes de formas irregulares (não-retangulares, não-circulares) (veja Bennell e Oliveira, 2008). Na prática, os problemas de corte de itens irregulares estão presentes em diversas indústrias nas quais é necessário cortar ou encaixar múltiplos itens irregulares em um recipiente, como, por exemplo, na indústria têxtil, de móveis e de calçados.

Um caso particular de problemas de corte de itens irregulares é aquele em que os recipientes (matéria-prima) possuem tamanho fixo, podendo ser retangulares ou irregulares. Neste caso, estamos interessados em minimizar a quantidade de recipientes utilizados para empacotar os itens. Estes problemas são conhecidos como problemas de corte de itens irregulares em recipientes (ou *bin packing problems*) e algumas estratégias heurísticas podem ser encontradas nos trabalhos de Halavati *et al.* (2008), López-Camacho *et al.* (2010) e López-Camacho *et al.* (2013). No caso em que os recipientes apresentam largura fixa e comprimento “infinito”, desejamos minimizar o comprimento do recipiente utilizado para alocar todos os itens. Estes problemas são conhecidos como problemas de corte de itens irregulares em faixa (ou *strip packing problems*) e algumas meta-heurísticas relevantes na área podem ser encontradas em Gomes e Oliveira (2006) (*simulated annealing*), Imamichi *et al.* (2009) (*iterated local search*), Umetani *et al.* (2009) (*guided local search*) e, a que obteve melhores resultados até o momento, Elkeran (2013) (*cuckoo search*). Os primeiros modelos matemáticos para o *strip packing problem* foram propostos recentemente por Fischetti e Luzzi (2009), Alvarez-Valdes *et al.* (2013), Toledo *et al.* (2013) e Leao *et al.* (2016).

Neste artigo, estamos interessados no problema de corte de tecido para a confecção de aventais e forros de luva, proveniente de uma empresa do interior do Estado de São Paulo. Neste problema, temos um tipo de forro de luva e três tipos de aventais (pequeno, médio e grande) juntamente com seus bolsos, cada qual com uma determinada demanda a ser atendida.

O problema estudado é considerado multi-objetivo, pois temos um rolo de matéria-prima com largura fixa e comprimento infinito (assim como o *strip packing problem*) e uma mesa com tamanho limitado onde o corte é realizado (assim como o *bin packing problem*). O

objetivo é utilizar a menor quantidade de recipientes para cortar todos os itens e, além disso, minimizar o comprimento de cada recipiente utilizado.

Desta forma, propomos uma heurística construtiva para a resolução do problema estudado. A heurística é baseada na heurística *Bottom-left* (proposta inicialmente por Baker *et al.*, 1980). Os recipientes são discretizados por malhas, com a largura e o comprimento da mesa utilizada para o corte. Além disso, utilizamos a heurística *Bottom-left* em duas abordagens diferentes: uma utilizando malha e a outra de forma contínua, adaptadas para o caso do corte de aventais e forros de luva. Utilizamos a técnica de *inner-fit polygon* para alocar os itens no interior do recipiente e a técnica de *no-fit polygon* para evitar sobreposição entre os itens. Os resultados dos métodos de resoluções foram satisfatórios, conseguindo altas taxas de ocupação dos recipientes e reduzindo o desperdício de matéria-prima.

O trabalho está organizado da seguinte forma. Na Seção 2, apresentamos o problema estudado neste trabalho. Na Seção 3, temos os métodos de resolução para o problema. A Seção 4 contém os resultados numéricos obtidos. Por fim, algumas conclusões são apresentadas na Seção 5.

2. Definição do Problema

O problema de corte de aventais e forros de luva presente neste trabalho provém de uma empresa do interior do Estado de São Paulo. As informações apresentadas nesta seção são variações dos valores reais e servem apenas para facilitar o entendimento do leitor.

Para a confecção dos forros de luva, a fábrica utiliza dois moldes para representar o item que o compõe, um para a mão direita e um para a mão esquerda. Assim, um par de luvas é composto por dois itens para a mão direita e dois itens para a mão esquerda. Em linhas gerais, devemos cortar os forros de luva de um rolo de lona de algodão, de forma a atender a uma demanda (conhecida a priori). Para a realização desse corte, podemos enfiar (dobrar a lona) ou não, utilizar uma máquina para a realização do corte ou realizar o corte de maneira manual. A fábrica utiliza um balancim ou uma faca elétrica para fazer o corte.

Para a confecção dos aventais, a fábrica utiliza dois moldes para representar os itens que o compõem, um para o avental propriamente dito e um para o bolso. Além disso, temos a utilização da lona de algodão que apresenta 1,75m de largura e 100m de comprimento, de uma mesa com 2,70m de comprimento e 1,90m de largura e uma faca elétrica para a realização do corte da lona.

Há algumas restrições que são impostas para a realização do corte. Temos que a lona utilizada para a confecção dos aventais e forros de luva é composta por fibras, assim, apenas são permitidos cortes perpendiculares a essas fibras, pois, caso contrário, o produto não terá o acabamento desejado e, desta maneira, o item será descartado. Logo, vamos utilizar as rotações de 0 e 180 graus para os itens do forro de luva. Outra restrição é o número de camadas de lona que podem ser feitas. Quando o corte é realizado em um balancim, temos que o número máximo de camadas de tecido que ele suporta cortar é 8. Caso o corte seja feito utilizando uma faca elétrica, o número máximo é 20 camadas.

Uma restrição importante para o corte dos aventais é que não pode ser feito um leiaute (que contém a configuração dos itens que compõem o avental) maior que o tamanho da mesa, pois isto inviabiliza o corte. Os itens dos aventais podem ser cortados em qualquer rotação, pois é feita uma costura na borda do avental de forma que este não desfie. Caso a demanda dos aventais seja satisfeita e ainda haja posições em que os forros de luva podem ser alocados, é permitido alocá-los juntamente com os aventais.

Dado o cenário presente na fábrica de aventais e forros de luva, o problema abordado neste trabalho tem como objetivo alocar uma demanda de itens (aventais e forros de luva) dentro de recipientes retangulares (com a largura igual à largura do rolo de lona e comprimento igual ao comprimento da mesa) utilizando a menor quantidade de recipientes possível e minimizando o comprimento utilizado em cada recipiente para cortar todos os itens desejados. Assim, o problema de corte de aventais e forros de luva será tratado, conjuntamente, como um problema de corte de itens irregulares em recipientes e em faixa. Desta forma, na Seção 2.1, apresentamos como os itens e os recipientes são representados. A Seção 2.2 descreve o procedimento para verificar a sobreposição entre itens e na Seção 2.3 temos o procedimento para alocar um item dentro de um recipiente.

2.1 Representação dos Itens e Recipientes

Há várias maneiras de representar um item e, dentre as mais comuns, estão a representação por pontos em uma malha e a representação por polígonos. Usando estes diferentes tipos de representação, foram desenvolvidas técnicas distintas para a identificação dos problemas geométricos inerentes aos problemas de corte de itens irregulares. Uma revisão sobre diferentes representações para os itens e as análises geométricas pode ser encontrada em Bennell e Oliveira (2008).

Neste trabalho, o recipiente no qual os itens são empacotados é representado por um retângulo, com largura fixa e comprimento considerado infinito. Os polígonos que representam os itens são definidos por um conjunto de pontos ordenados no sentido anti-horário. Um dos vértices deste polígono é escolhido para ser o ponto de referência. Utilizamos o ponto de referência para identificar a posição de alocação do item no recipiente. A Figura 1 ilustra um exemplo de representação de um item por polígono dado pelos vértices A , B , C , D , E e F e seu ponto de referência B .

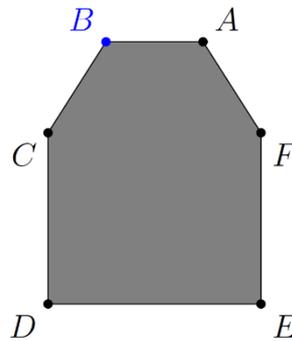


Figura 1 - Representação de um item por polígono e seu ponto de referência.

2.2 Verificação de Sobreposição entre Itens

Uma das maiores dificuldades encontradas nos problemas de corte de itens irregulares é evitar a sobreposição de itens. Neste trabalho, utilizamos o conceito de *no-fit polygon* (*NFP*) (veja Bennell e Oliveira, 2008), para verificar as posições relativas entre dois itens. Dados dois itens A e B , o *no-fit polygon* do item B em relação ao item A (NPF_{AB}) é obtido ao orbitar o item B ao redor do item A , de forma que eles sempre fiquem em contato. Simultaneamente, traçamos pelo ponto de referência de B , o caminho que este movimento orbital faz, obtendo assim o NPF_{AB} .

Na Figura 2, temos um item A (fixo) e um item B (orbital), com o seu ponto de referência demarcado. Ao orbitar o item B ao redor do item A , o NPF_{AB} é obtido.

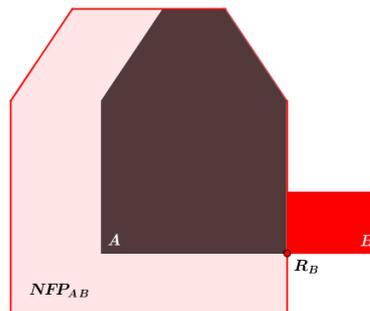


Figura 2 - Itens A e B e *no-fit polygon* de B em relação a A (NPF_{AB}).

Note que, se o ponto de referência do item B estiver no interior do NPF_{AB} , então B e A se sobrepõem; se o ponto de referência do item B estiver na borda do NPF_{AB} , então B toca A ; se o ponto de referência do item B estiver no exterior do NPF_{AB} , então B não se sobrepõe e nem toca A . Desta forma, para saber se um item B se sobrepõe a um item A , basta verificar se o ponto de referência do item B está no interior, na borda ou no exterior do NPF_{AB} . Geralmente, os NFP 's são calculados a priori em uma etapa de pré-processamento. Vale ressaltar que, neste trabalho, consideramos apenas NFP 's convexos. No caso dos forros de luvas, dividimos o NFP em polígonos convexos.

2.3 Alocação de Itens em Um Recipiente

Para realizar a alocação de um item em um recipiente, além de verificar a sobreposição entre este com os demais itens, precisamos verificar as posições de alocação válidas para que o item fique completamente dentro do recipiente. Para isso, utilizaremos uma técnica chamada *inner-fit polygon* (IFP) (veja Gomes e Oliveira, 2002).

Considere o retângulo R que representa o recipiente. Para construir o *inner-fit polygon* de um item B em relação ao retângulo R , o item B desliza ao longo do contorno interno do retângulo R e traçamos o caminho feito pelo ponto de referência do item B , dando origem ao IFP entre R e B (IFP_{RB}). A Figura 3 ilustra um recipiente R , um item B e seu *inner-fit polygon*.

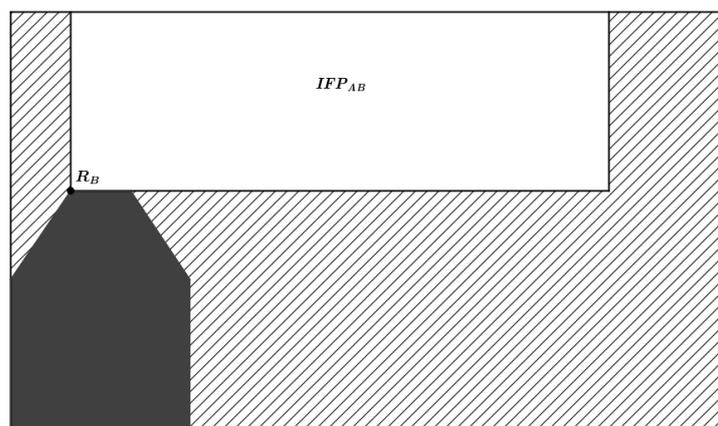


Figura 3 - Item B e seu IFP em relação ao recipiente R (IFP_{RB}).

Se o ponto de referência do item B for alocado no interior ou na borda do retângulo IFP_{RB} , o item está completamente contido no recipiente.

3. Métodos de Resolução

Esta seção apresenta os métodos de resolução para o problema de corte de itens irregulares em um recipiente com dimensões conhecidas. Uma característica difícil de incorporar ao problema estudado é a quantidade de dobras que desejamos fazer no recipiente, pois isso depende das decisões operacionais da empresa, como, por exemplo, quantos itens cortar e se é interessante estocar um conjunto de itens para os próximos dias. Esta dificuldade é tratada pelo funcionário responsável que possui uma cartela de pedidos da empresa, com a quantidade de itens requeridos para o corte e a expectativa para os próximos dias. Optamos por desconsiderar a questão das dobras, deixando esta decisão no nível operacional para os responsáveis pelo corte poderem usar os métodos de resolução da melhor maneira possível. Sendo assim, os métodos apresentados nesta seção visam alocar uma demanda de itens no menor número de recipientes possível e minimizar o comprimento utilizado em cada recipiente.

Nas Seções 3.1, 3.2 e 3.3 explicaremos os métodos de resolução utilizados neste trabalho.

3.1 Método Proposto

A heurística proposta é especialmente desenvolvida para o problema estudado e para as características geométricas dos itens que representam os aventais e os forros de luva. Primeiramente, observamos que a geometria dos itens e do recipiente sugerem alocar primeiro os itens maiores, de preferência próximos da borda superior ou inferior do recipiente e, em seguida, os itens menores, levando à obtenção de soluções de boa qualidade. Outra ideia, apresentada na Figura 4, é alocar os itens no canto inferior (avental G) e os itens no canto superior na rotação de 180 graus (avental M). Neste trabalho, discretizamos o recipiente que representa uma mesa com largura L e comprimento C . É importante destacar que discretizamos o recipiente em centímetros para obter soluções mais compactas.

Através de alguns experimentos computacionais preliminares, observamos que a alocação, apresentada na Figura 5, do item no canto superior (avental M) sem a rotação de 180 graus resultava em melhores resultados. Desta forma, o método proposto aloca os itens no canto inferior (avental G) e os itens no canto superior (avental M) na rotação de zero grau, mantendo a discretização do recipiente em centímetros.

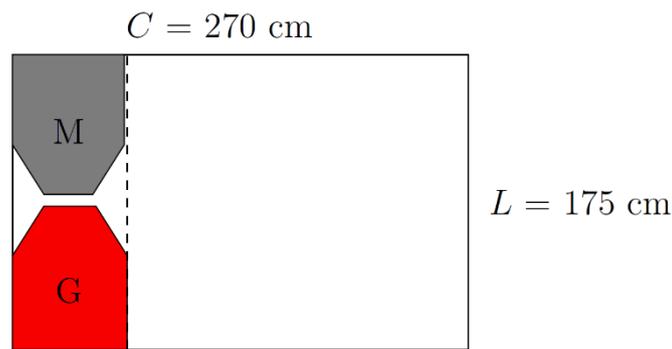


Figura 4 - Exemplo de alocação de dois aventais com a rotação de 180 graus para o item do canto superior.

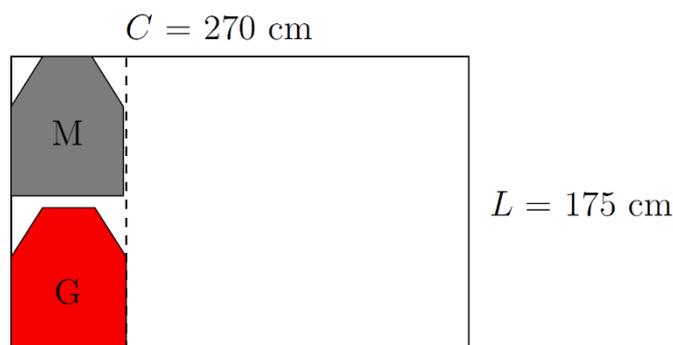


Figura 5 - Exemplo de alocação de dois aventais com a rotação de zero grau para o item do canto superior.

O Algoritmo 1 apresenta o método proposto. Nele, os itens são ordenados por seu comprimento em ordem decrescente. A estratégia utilizada consiste em alocar cada tipo de item até atender a demanda ou não conseguir empacotar mais nenhum item daquele tipo, passando para o próximo item. A busca por posições de alocação é feita de duas maneiras, sempre intercaladas no algoritmo pela variável *busca*: Canto Esquerdo mais próximo da borda Inferior (CEI) e Canto Esquerdo mais próximo da borda Superior (CES). Para exemplificar, a Figura 6 apresenta uma discretização da mesa com lado de cinco centímetros, para as buscas de posições (CEI) e (CES) em cada posição da malha, ordenada de forma crescente. Verificamos se o ponto de referência do item pode ser alocado ou não nas posições da malha. O algoritmo tem como entrada: *Itens* que é a lista com os tipos de itens; *demanda* que é um vetor com a demanda dos tipos de itens; *n* é a quantidade de tipos de itens; *L* e *C* são a largura e o comprimento do recipiente, respectivamente. Como saída temos *S* que é a solução obtida, formada pelas posições dos itens em cada recipiente. Utilizamos este mesmo algoritmo no caso em que temos os itens dos forros de luva.

Algoritmo 1: MÉTODO PROPOSTO

Entrada: *Itens, demanda, n, L, C*
Saída: *S*

1 **Início**
2 $S \leftarrow \text{vazio};$
3 *Itens* é ordenado de forma decrescente pelo comprimento de cada item;
4 *aux* recebe o somatório do vetor *demanda*;
5 $busca = 0;$
6 **enquanto** $aux > 0$ **faça:**
7 Crie um *recipiente* vazio de largura *L* e comprimento *C*;
8 **para** $i = 0; i < n; i = i + 1$ **faça**
9 **para** $j = 0; j < demanda; j = j + 1$ **faça**
10 **se** $busca == 0$ **então**
11 Busque o ponto do *recipiente*, pela forma CEI, em que o $item_i$ pode ser
 alocado na rotação 0° ;
12 $busca = 1;$
13 **fim**
14 **senão**
15 Busque o ponto do *recipiente*, pela forma CES, em que o $item_i$ pode ser
 alocado na rotação 0° ;
16 $busca = 0;$
17 **fim**
18 **se** o $item_i$ pode ser alocado **então**
19 A solução *S* recebe o $item_i$ na posição encontrada e rotação de 0° ;
20 A demanda do $item_i$ é reduzida em uma unidade;
21 **fim**
22 **fim**
23 **fim**
24 *aux* recebe o somatório do vetor *demanda*;
25 **fim**
26 **fim**
27 **retorna** *S*

5	10	15	20	25
4	9	14	19	24
3	8	13	18	23
2	7	12	17	22
1	6	11	16	21

(CEI)

1	6	11	16	21
2	7	12	17	22
3	8	13	18	23
4	9	14	19	24
5	10	15	20	25

(CES)

Figura 6 - Busca de posições factíveis: canto esquerdo inferior (CEI) e canto esquerdo superior (CES).

3.2 Heurística Bottom-left Discreta

A heurística *Bottom-left* discreta é baseada no método proposto. O que difere este método de solução para o anterior é a busca por posições de alocação. Não é mais necessário alocar um item no canto esquerdo inferior e o item seguinte no canto esquerdo superior. Na heurística

Bottom-left discreta, o item é sempre alocado o mais abaixo e à esquerda possível no recipiente. Denominamos ser discreta pelo fato de utilizarmos uma malha discretizada em centímetros.

O Algoritmo 2, apresenta a heurística *Bottom-left* discreta. Nela, os itens são ordenados por seu comprimento em ordem decrescente. A estratégia utilizada consiste em alocar cada tipo de item até atender a demanda ou não conseguir empacotar mais nenhum item daquele tipo, passando para o próximo item. A busca por posições de alocação é feita de acordo com o Canto Esquerdo mais próximo da borda Inferior (CEI), como mostra a parte esquerda da Figura 6. Verificamos se o ponto de referência do item pode ser alocado ou não nas posições da malha. O algoritmo tem como entrada: *Itens* que é a lista com os tipos de itens; *demanda* que é um vetor com a demanda dos tipos de itens; *n* é a quantidade de tipos de itens; *L* e *C* são a largura e o comprimento do recipiente, respectivamente. Como saída temos *S* que é a solução obtida, formada pelas posições dos itens em cada recipiente. Utilizamos este mesmo algoritmo no caso em que temos os itens dos forros de luva.

Algoritmo 2: HEURÍSTICA *Bottom-left* DISCRETA

Entrada: *Itens*, *demanda*, *n*, *L*, *C*

Saída: *S*

1 **Início**

2 $S \leftarrow \text{vazio};$

3 *Itens* é ordenado de forma decrescente pelo comprimento de cada item;

4 *aux* recebe o somatório do vetor demanda;

5 **enquanto** *aux* > 0 **faça:**

6 Crie um *recipiente* vazio de largura *L* e comprimento *C*;

7 **para** $i = 0; i < n; i = i + 1$ **faça**

8 **para** $j = 0; j < \text{demanda}; j = j + 1$

9 Busque o ponto do *recipiente*, pela forma CEI, em que o *item_i* pode ser alocado na rotação 0°;

10 **se** o *item_i* pode ser alocado **então**

11 A solução *S* recebe o *item_i* na posição encontrada e rotação de 0°;

12 A demanda do *item_i* é reduzida em uma unidade;

13 **fim**

14 **fim**

15 **fim**

16 *aux* recebe o somatório do vetor demanda;

17 **fim**

18 **fim**

19 **retorna** *S*

3.3 Heurística Bottom-left Contínua

A heurística *Bottom-left* contínua é baseada na heurística *Bottom-left* discreta. O que difere estas duas heurísticas é que na heurística *Bottom-left* contínua não utilizamos uma malha contendo as posições de alocação dos itens como na heurística *Bottom-left* discreta. O fato de denominarmos a heurística como contínua não implica que podemos alocar o item em qualquer posição do recipiente. Os pontos de alocação são limitados pelo fato de utilizarmos os pontos de intersecção entres os *NFP's*, *IFP's* e o recipiente para encontrar uma posição válida de alocação para o item. Da mesma forma que o método anterior, sempre buscamos posições mais à esquerda e abaixo do recipiente para alocar o item.

Algoritmo 3: HEURÍSTICA *Bottom-left* CONTÍNUA

Entrada: *Itens*, *demanda*, *n*, *L*, *C*

Saída: *S*

1 **Início**

2 $S \leftarrow \text{vazio};$

3 *Itens* é ordenado de forma decrescente pelo comprimento de cada item;

4 *aux* recebe o somatório do vetor demanda;

5 **enquanto** *aux* > 0 **faça:**

6 Crie um *recipiente* vazio de largura *L* e comprimento *C*;

7 Insira o primeiro item na posição mais à esquerda e mais abaixo do recipiente;

8 **para** $i = 0; i < n; i = i + 1$ **faça**

9 **para** $j = 0; j < \text{demanda}; j = j + 1$ **faça**

10 Inicializar a lista L_1 de candidatos a ponto de inserção do item *j* como vazia;

11 **para** cada NFP_{kj} do item *j* (orbital) contra os itens *k* já inseridos no *recipiente*

12 **faça**

13 Calcule as intersecções válidas das arestas do NFP_{kj} com *IFP* do item *j* e o *recipiente*;

14 Insira os pontos de intersecções na lista L_1 ;

15 **fim**

16 **enquanto** a lista L_1 não estiver vazia **faça:**

17 O ponto $cand_j$ recebe o primeiro ponto da lista L_1 ;

18 **se** o ponto $cand_j$ fornece o menor comprimento para o *recipiente* **então;**

19 A solução *S* recebe o item *j* na posição $cand_j$;

20 A demanda do item *j* é reduzida em uma unidade;

21 **fim**

22 Retire o ponto da lista L_1 ;

23 **fim**

24 **fim**

25 *aux* recebe o somatório do vetor demanda;

26 **fim**

27 **fim**

28 **retorna** *S*

O Algoritmo 3, apresenta a heurística *Bottom-left* contínua. Nela, os itens são ordenados por seu comprimento em ordem decrescente. A estratégia utilizada consiste em alocar cada tipo de item até atender a demanda ou não conseguir empacotar mais nenhum item daquele tipo, passando para o próximo item. O algoritmo tem como entrada: *Itens* que é a lista com os tipos de itens; *demanda* que é um vetor com a demanda dos tipos de itens; n é a quantidade de tipos de itens; L e C são a largura e o comprimento do recipiente, respectivamente. Como saída temos S que é a solução obtida, formada pelas posições dos itens em cada recipiente. Ao procurar um ponto melhor, candidato à inserção para o item (ou seja, um ponto mais à esquerda e abaixo do recipiente), tomamos pontos nas arestas dos *NFP's* do item a ser inserido contra os itens já inseridos no recipiente, já que estes representam posições do recipiente em que o item irá tocar algum outro item já alocado. Ao considerar estes pontos, podemos nos deparar com pontos de inserção que não respeitam algumas das restrições de não sobreposição com itens já inseridos ou de manter o item dentro do recipiente. Nestes casos, trocamos o ponto candidato a ponto de inserção por outro, dado pela intersecção de arestas de *NFP's* ou *IFP's* cujas restrições foram violadas.

4. Experimentos Computacionais

Nesta seção, apresentamos os experimentos computacionais realizados para o método proposto e as heurísticas *Bottom-left* discreta e contínua. Implementamos os métodos em linguagem C/C++ e os experimentos computacionais foram realizados em um computador com processador Intel Core i7-4790M com 16 GB de memória RAM utilizando o sistema operacional Ubuntu 14.04 LTS.

Na Seção 4.1, vamos descrever as instâncias utilizadas nos experimentos e na Seção 4.2 temos a comparação entre os métodos de resolução.

4.1 Instâncias

As instâncias utilizadas neste trabalho para resolver o problema de corte de itens irregulares em recipientes são baseadas em um problema real, presente em uma indústria de corte de aventais e forros de luva do interior de São Paulo.

Um par de luva é composto por dois itens do forro da mão esquerda e dois itens do forro da mão direita, representados por polígonos e apresentados na Figura 7. Observe que o polegar (“dedão”) não faz parte do forro de luva, pois ele é feito separadamente pela empresa, utilizando outro material.

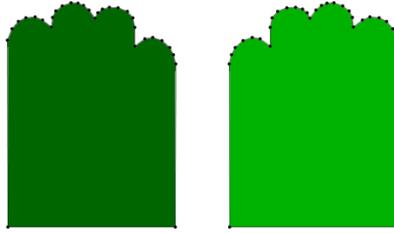


Figura 7 - Representação do forro de luva da mão direita e esquerda, respectivamente, na rotação de zero grau.

Com relação aos aventais, temos três tamanhos diferentes (P, M e G) que podem ser vistos na Figura 8. Note que um avental é composto pelo avental propriamente dito (hexágono) e um bolso (retângulo). Ambos são representados por polígonos.

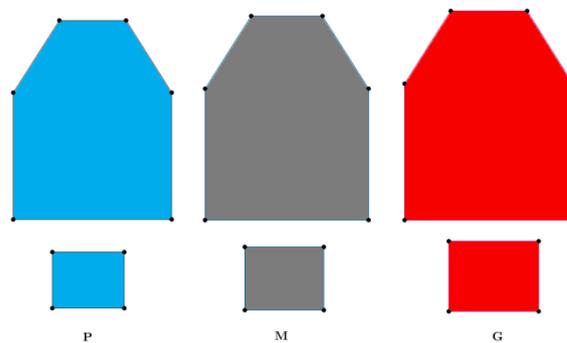


Figura 8 - Representação dos itens que compõem os aventais com seus respectivos tamanhos na rotação de zero grau.

São permitidas rotações livres para os itens dos aventais e de 0 e 180 graus para os itens do forro de luva. Por simplicidade, realizamos alguns experimentos preliminares com as rotações 0, 90, 180 e 270 graus para os itens dos aventais e 0 e 180 graus para os itens do forro de luvas. De acordo com esses experimentos, obtivemos melhores resultados quando o bolso do avental está em 90 graus e o avental em 0 grau. Já com relação aos forros de luva, a melhor rotação deu-se com rotação de 0 grau. Desta forma, definimos a rotação do avental e forro de luva como sendo 0 grau e o bolso do avental 90 graus.

Com relação aos nomes das instâncias, eles são definidos da seguinte maneira:

- $AV_{P,M,G}$: utilizando apenas aventais, onde P, M e G representam a quantidade de aventais de tamanho pequeno, médio e grande, respectivamente;
- L_{pares} : utilizando apenas forros de luva, onde pares representa a quantidade de pares de luvas;

- $T_{P,M,G,pares}$: utilizando aventais e forros de luva, onde P, M, G e pares representam a quantidade de aventais de tamanho pequeno, médio e grande, e a quantidade de pares de luvas, respectivamente.

Os itens e o recipiente destas instâncias estão disponíveis na página <http://www.icmc.usp.br/pessoas/andretta/podes-2016>.

4.2 Comparação entre os Métodos de Resolução

Nesta seção, vamos comparar os métodos de resolução utilizados neste trabalho e verificar qual foi o melhor para a resolução dos problemas de corte de aventais e forros de luvas.

Primeiramente, vamos analisar o comportamento dos métodos de resolução utilizando apenas um tipo de avental. A Tabela 1 apresenta os resultados para os métodos de resolução utilizando apenas um tipo de avental.

Na Tabela 1, a primeira coluna apresenta os nomes das instâncias. A segunda, o número total de itens cortados. A terceira, quarta e quinta, os nomes dos métodos de resolução divididos em três partes, que contêm: a soma do comprimento utilizado em cada recipiente (CT que significa comprimento total utilizado), em centímetros; o tempo de resolução (T), em segundos e a porcentagem de ocupação (O) dos recipientes, calculada como a soma das áreas dos itens empacotados dividida pela soma das áreas dos recipientes, considerando que as dimensões dos recipientes são dadas pela largura fixa e o comprimento utilizado. Em todas as tabelas dessa seção, os menores comprimentos encontrados são destacados, e vamos denotar a heurística *Bottom-left* discreta por BLD e a heurística *Bottom-left* contínua por BLC.

Note que, com relação aos aventais de tamanho *P* o método de resolução com o maior número de melhores soluções foi o método proposto, o qual encontrou oito soluções com comprimentos menores ou iguais que os comprimentos obtidos pelos outros métodos. Desta forma, ele forneceu uma taxa de ocupação melhor ou igual para esses casos, já que a taxa de ocupação está diretamente relacionada ao comprimento utilizado dos recipientes. Com relação ao tempo de resolução, observamos que a heurística *Bottom-left* contínua apresenta tempo praticamente nulo em todas as instâncias e a qualidade de solução, nesse caso voltada para o comprimento total utilizado, é bem próxima da qualidade de solução do método proposto, possuindo uma diferença de menos de 0,5%. Com relação aos aventais de tamanho *M*, temos que o comportamento dos métodos de resolução em relação ao comprimento utilizado é igual na maioria dos casos. A heurística *Bottom-left* contínua obteve nove soluções com

comprimento total utilizado (CT) menores ou iguais que os comprimentos obtidos pelos outros dois métodos de solução. Com exceção apenas para a instância $AV_{0,2,0}$, na qual a heurística *Bottom-left* contínua apresentou um comprimento de 0,01 centímetros maior que a solução obtida pelo método proposto. Essa diferença é muito pequena (menos de 0,5%) e pode ter ocorrido por questões de erros de arredondamento computacional. Na prática, essa solução seria considerada igual quando comparada à solução encontrada com menor valor. Com relação ao tempo computacional, novamente a heurística *Bottom-left* contínua se comportou muito bem, utilizando praticamente zero segundos para a resolução dos problemas. Por fim, utilizando apenas aventais de tamanho G , temos que os métodos de resolução se comportaram igualmente com relação a solução encontrada, ou seja, todos obtiveram os mesmos comprimentos utilizados. Com relação ao tempo de resolução, mais uma vez, a heurística *Bottom-left* contínua obteve um tempo praticamente nulo.

A Figura 9 mostra as soluções com maiores taxas de ocupação encontradas pelo método proposto utilizando apenas um tipo de avental. Em alguns casos, temos mais de uma solução com a maior taxa de ocupação, desta forma, optamos por ilustrar apenas uma dessas soluções.

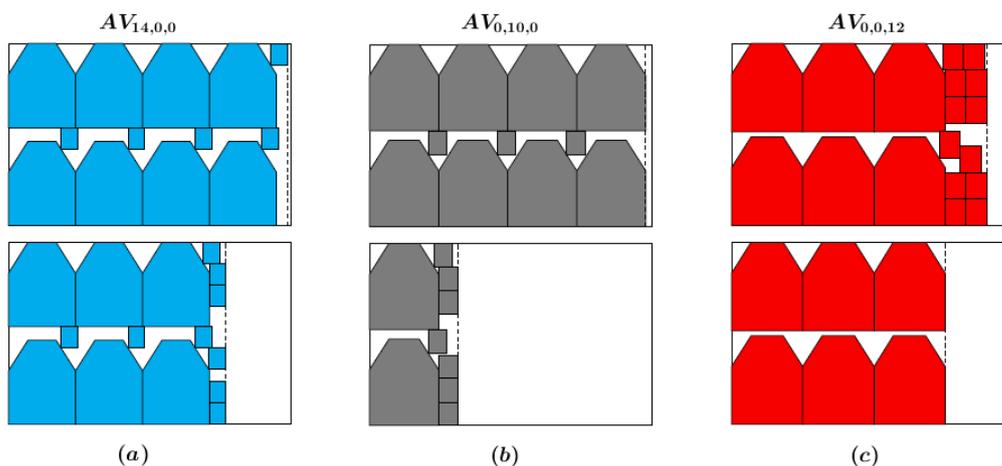


Figura 9 - Solução com maior taxa de ocupação para o método proposto utilizando apenas aventais (a) P , (b) M e (c) G , respectivamente.

Vamos analisar agora o comportamento dos métodos de resolução utilizando todos os tipos de aventais juntos. A Tabela 2, apresenta os resultados computacionais para os métodos de resolução apresentados nesse trabalho. As colunas dessa tabela apresentam as mesmas informações presentes nas colunas da Tabela 1.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Tabela 1: Comparação entre os métodos de solução utilizando apenas um tipo de avental.

Instância	Total de itens	Método proposto			BLD			BLC		
		CT(cm)	T(s)	O(%)	CT(cm)	T(s)	O(%)	CT(cm)	T(s)	O(%)
<i>AV_{2,0,0}</i>	4	74,30	0,73	76,39	74,40	0,72	76,29	74,35	0,00	76,34
<i>AV_{4,0,0}</i>	8	143,20	1,51	79,27	143,20	1,54	79,27	143,05	0,00	79,35
<i>AV_{6,0,0}</i>	12	208,00	2,35	81,86	208,00	2,30	81,86	208,00	0,00	81,86
<i>AV_{8,0,0}</i>	16	282,30	3,15	80,42	282,40	3,18	80,39	282,35	0,00	80,41
<i>AV_{10,0,0}</i>	20	346,30	3,87	81,95	346,40	3,90	81,92	346,35	0,00	81,94
<i>AV_{12,0,0}</i>	24	410,30	4,69	83,00	410,40	4,79	82,98	410,35	0,00	82,99
<i>AV_{14,0,0}</i>	28	474,30	5,59	83,77	474,40	5,71	83,75	474,34	0,00	83,76
<i>AV_{16,0,0}</i>	32	548,60	6,35	82,77	548,80	6,43	82,74	548,69	0,00	82,75
<i>AV_{18,0,0}</i>	36	614,90	7,43	83,07	615,10	7,56	83,05	614,89	0,01	83,07
<i>AV_{20,0,0}</i>	40	686,90	8,37	82,63	687,20	8,56	82,59	687,04	0,01	82,61
<i>AV_{0,2,0}</i>	4	79,60	0,79	76,63	79,70	0,79	76,53	79,61	0,00	76,62
<i>AV_{0,4,0}</i>	8	150,00	1,69	81,33	150,00	1,60	81,33	150,00	0,00	81,33
<i>AV_{0,6,0}</i>	12	216,00	2,54	84,72	216,00	2,49	84,72	216,00	0,00	84,72
<i>AV_{0,8,0}</i>	16	282,00	3,27	86,52	282,00	3,28	86,52	282,00	0,00	86,52
<i>AV_{0,10,0}</i>	20	348,00	4,10	87,64	348,00	4,30	87,64	348,00	0,00	87,64
<i>AV_{0,12,0}</i>	24	422,10	4,96	86,71	422,00	5,31	86,73	421,94	0,00	86,74
<i>AV_{0,14,0}</i>	28	493,60	5,98	86,50	493,70	6,30	86,49	493,60	0,00	86,50
<i>AV_{0,16,0}</i>	32	564,00	6,40	86,52	564,00	6,75	86,52	564,00	0,00	86,52
<i>AV_{0,18,0}</i>	40	630,00	7,46	87,14	630,00	8,18	87,14	630,00	0,01	87,14
<i>AV_{0,20,0}</i>	28	696,00	8,73	87,64	696,00	9,22	87,64	696,00	0,01	87,64
<i>AV_{0,0,2}</i>	4	85,50	0,83	76,78	85,50	0,83	76,78	85,50	0,00	76,78
<i>AV_{0,0,4}</i>	8	156,00	1,71	84,16	156,00	1,65	84,16	156,00	0,00	84,16
<i>AV_{0,0,6}</i>	12	224,00	2,65	87,92	224,00	2,65	87,92	224,00	0,00	87,92
<i>AV_{0,0,8}</i>	16	309,50	3,52	84,84	309,50	3,54	84,84	309,50	0,00	84,84
<i>AV_{0,0,10}</i>	20	380,00	4,40	86,38	380,00	4,35	86,38	380,00	0,00	86,38
<i>AV_{0,0,12}</i>	24	448,00	5,33	87,92	448,00	5,35	87,92	448,00	0,00	87,92
<i>AV_{0,0,14}</i>	28	533,50	6,32	86,14	533,50	6,35	86,14	533,50	0,00	86,14
<i>AV_{0,0,16}</i>	32	604,00	7,22	86,95	604,00	7,21	86,95	604,00	0,00	86,95
<i>AV_{0,0,18}</i>	36	672,00	8,18	87,92	672,00	8,28	87,92	672,00	0,01	87,92
<i>AV_{0,0,20}</i>	40	757,50	9,32	86,66	757,50	9,35	86,66	757,50	0,01	86,66

De acordo com a Tabela 2, observamos que o método de resolução que obteve melhores resultados foi a heurística *Bottom-left* contínua, já que encontrou soluções melhores ou iguais em quinze instâncias em um total de vinte, quando comparado aos outros métodos. Além disso, este método apresentou um tempo de resolução muito inferior que os demais métodos, possuindo, em média, um tempo de resolução de 0,02 segundo. Desta forma, para o

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

experimento utilizando todos os tipos de aventais juntos a heurística *Bottom-left* contínua obteve melhor comportamento tanto em relação a qualidade de solução como ao tempo de resolução.

Tabela 2: Comparação entre os métodos de solução utilizando apenas todos os tipos de aventais juntos.

Instância	Total de itens	Método proposto			BLD			BLC		
		CT(cm)	T(s)	O(%)	CT(cm)	T(s)	O(%)	CT(cm)	T(s)	O(%)
$AV_{1,1,1}$	6	130,00	3,45	70,54	130,00	3,40	70,54	130,00	0,00	70,54
$AV_{2,2,2}$	12	216,00	7,74	84,91	216,00	7,26	84,91	216,00	0,00	84,91
$AV_{3,3,3}$	18	328,00	10,78	83,87	328,00	10,57	83,87	328,00	0,00	83,87
$AV_{4,4,4}$	24	421,50	14,90	87,02	421,40	15,13	87,04	421,33	0,00	87,06
$AV_{5,5,5}$	30	590,00	18,48	77,71	591,20	18,73	77,56	591,10	0,01	77,57
$AV_{6,6,6}$	36	637,50	22,73	86,31	637,40	22,61	86,32	637,32	0,01	86,33
$AV_{7,7,7}$	42	786,80	25,76	81,58	746,80	26,24	85,95	746,70	0,01	85,97
$AV_{8,8,8}$	48	841,60	29,24	87,17	841,70	29,26	87,16	841,61	0,01	87,17
$AV_{9,9,9}$	54	996,40	34,04	82,83	988,30	33,10	83,51	988,20	0,01	83,52
$AV_{10,10,10}$	60	1053,50	39,50	87,04	1053,40	39,21	87,05	1053,32	0,02	87,06
$AV_{11,11,11}$	66	1172,40	42,94	86,04	1172,40	42,87	86,04	1172,31	0,02	86,05
$AV_{12,12,12}$	72	1260,40	46,85	87,31	1269,90	47,17	86,65	1269,59	0,02	86,68
$AV_{13,13,13}$	78	1402,70	50,25	84,99	1407,70	50,79	84,69	1407,36	0,03	84,71
$AV_{14,14,14}$	84	1479,10	55,37	86,80	1479,10	56,40	86,80	1478,89	0,03	86,81
$AV_{15,15,15}$	90	1584,00	61,01	86,84	1584,20	60,82	86,83	1583,88	0,04	86,85
$AV_{16,16,16}$	96	1688,00	61,32	86,92	1688,20	62,47	86,91	1687,88	0,04	86,93
$AV_{17,17,17}$	102	1806,80	69,09	86,28	1807,00	69,41	86,27	1806,63	0,04	86,29
$AV_{18,18,18}$	108	1899,90	72,71	86,88	1899,90	74,55	86,88	1899,57	0,05	86,89
$AV_{19,19,19}$	114	2015,90	76,88	86,43	2003,00	79,55	86,99	2002,55	0,06	87,01
$AV_{20,20,20}$	120	2102,00	83,00	87,25	2104,20	83,99	87,16	2103,87	0,06	87,17

A Figura 10 mostra a solução com maior taxa de ocupação encontrada pelo método proposto utilizando todos os tipos de aventais.

Com relação ao experimento utilizando apenas os forros de luva, temos, na Tabela 3, os resultados obtidos pelos métodos de resolução presentes neste trabalho. As colunas dessa tabela apresentam as mesmas informações presentes nas colunas da Tabela 1.

Observamos que os resultados obtidos pelos três métodos de resolução são bem próximos quando comparados pelos comprimentos obtidos por eles. Note que, por exceção da primeira instância (L_5), a heurística *Bottom-left* contínua apresenta soluções com menores comprimentos. Mas, a diferença dos comprimentos obtidos pela heurística *Bottom-left*

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

contínua para o método proposto e a heurística *Bottom-left* discreta é mínima, não ultrapassando 0,5%. Provavelmente essa diferença nos valores de solução é dada por erros de arredondamento computacional. Na visão da empresa, essa diferença de solução seria desprezível. Sendo assim, podemos considerar que a qualidade de solução dos três métodos é igual. Um fator que pode impactar bastante na empresa é o tempo de resolução. Podemos observar que a heurística *Bottom-left* contínua apresenta, em média, um tempo de resolução de 0,08 segundo. Já o método proposto e a heurística *Bottom-left* discreta apresentam, em média, 2,48 e 2,54 segundos, respectivamente. Sendo assim, o método de resolução que apresenta menor tempo de resolução é a heurística *Bottom-left* contínua.

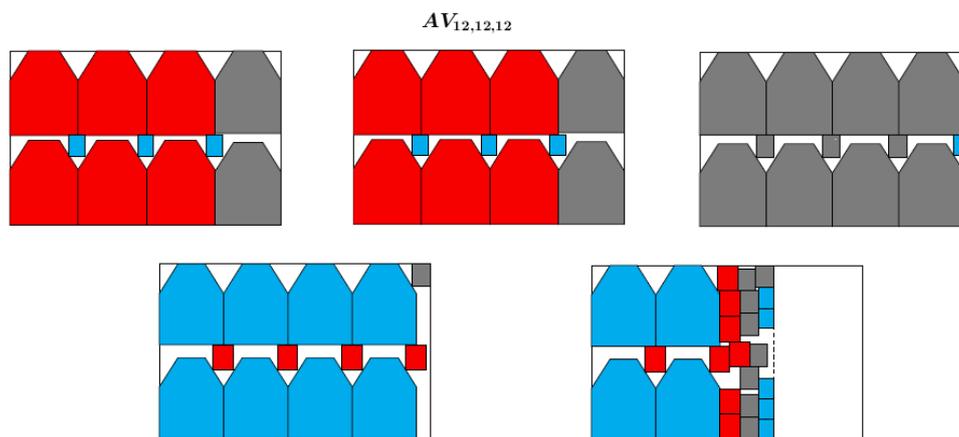


Figura 10 - Solução com a maior taxa de ocupação para o método proposto utilizando todos os tipos de aventais.

Tabela 3: Comparação entre os métodos de resolução utilizando os forros de luvas.

Instância	Total de itens	Método proposto			BLD			BLC		
		CT(cm)	T(s)	O(%)	CT(cm)	T(s)	O(%)	CT(cm)	T(s)	O(%)
L_5	20	84,40	0,51	75,09	84,40	0,50	75,09	84,40	0,01	75,09
L_{10}	40	147,70	1,06	85,81	147,70	1,06	85,81	147,68	0,02	85,83
L_{15}	60	211,00	1,66	90,10	211,00	1,69	90,10	210,97	0,04	90,12
L_{20}	80	295,40	2,39	85,81	295,40	2,40	85,81	295,36	0,06	85,83
L_{25}	100	358,70	3,09	88,34	358,70	3,18	88,34	358,66	0,10	88,35
L_{30}	120	422,00	3,91	90,10	422,00	4,01	90,10	421,95	0,14	90,12
L_{35}	140	506,40	4,76	87,60	506,40	4,91	87,60	506,34	0,19	87,61

A Figura 11 mostra a solução com maior taxa de ocupação encontrada pela heurística *Bottom-left* contínua utilizando quinze pares de forros de luva.

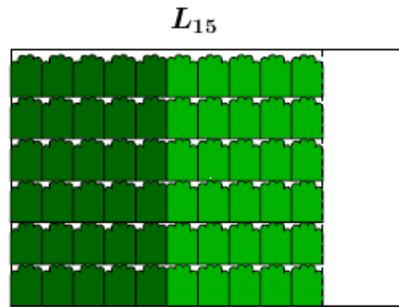


Figura 11 - Solução com maior taxa de ocupação para a heurística *Bottom-left* contínua utilizando os forros de luva.

Por fim, temos o experimento utilizando os aventais e forros de luva. A Tabela 4 apresenta os resultados obtidos pelos métodos de resolução presentes neste trabalho. As colunas dessa tabela apresentam as mesmas informações presentes nas colunas da Tabela 1.

Pela Tabela 4, temos que as melhores soluções obtidas são dadas pela heurística *Bottom-left* discreta e pela heurística *Bottom-left* contínua. Com exceção da primeira instância ($T_{1,1,1,1}$), para a qual as heurísticas obtiveram a mesma solução que o método proposto. Ambas as heurísticas encontram três soluções melhores cada. Com relação ao tempo de resolução, a heurística *Bottom-left* discreta apresenta um tempo de resolução, em média, de 28,39 segundos. Já a heurística *Bottom-left* contínua possui um tempo de resolução, em média, de 0,02 segundo.

Tabela 4: Comparação entre os métodos de resolução utilizando os aventais e forros de luva.

Instância	Total de itens	Método proposto			BLD			BLC		
		CT(cm)	T(s)	O(%)	CT(cm)	T(s)	O(%)	CT(cm)	T(s)	O(%)
$T_{1,1,1,1}$	10	130,00	6,64	80,29	130,00	6,82	80,29	130,00	0,00	80,29
$T_{2,2,2,2}$	20	247,10	14,28	84,48	241,10	14,27	86,58	239,09	0,00	87,31
$T_{3,3,3,3}$	30	372,00	20,85	84,17	369,30	20,84	84,79	370,08	0,01	84,61
$T_{4,4,4,4}$	40	486,30	28,59	85,85	479,70	28,82	87,03	486,51	0,02	85,82
$T_{5,5,5,5}$	50	615,50	34,67	84,79	614,20	34,69	84,97	610,72	0,02	85,45
$T_{6,6,6,6}$	60	725,30	43,21	86,34	723,80	43,67	86,52	722,04	0,03	86,73
$T_{7,7,7,7}$	70	858,40	48,90	85,12	848,60	49,65	86,10	848,70	0,04	86,09

A Figura 12 mostra a solução com maior taxa de ocupação encontrada pela heurística *Bottom-left* contínua utilizando aventais e forros de luva.

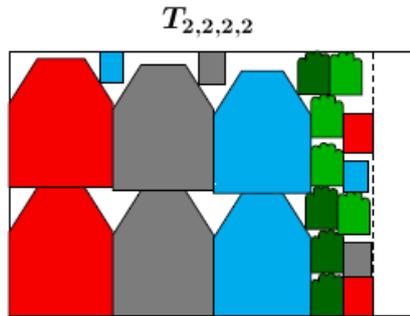


Figura 12 - Solução com maior taxa de ocupação para a heurística *Bottom-left* contínua utilizando aventais e forros de luva.

Temos, na Figura 13, a quantidade de melhores soluções (soluções com comprimento menor ou igual quando comparados aos outros métodos) encontradas (linha tracejada) e o tempo médio de resolução (linha contínua) de cada método de resolução envolvendo todas as instâncias presentes neste trabalho (no caso sessenta e cinco instâncias).

Portanto, o melhor método de resolução para o problema de corte de aventais e forros de luvas é a heurística *Bottom-left* contínua, tanto em relação à quantidade de soluções encontrada (quarenta e oito em sessenta e cinco instâncias) como em tempo de resolução (em média, 0,02 segundos). Note que, os tempos obtidos pelos métodos de resolução são baixos e, pelo ponto de vista da empresa, poderiam ser considerados iguais.

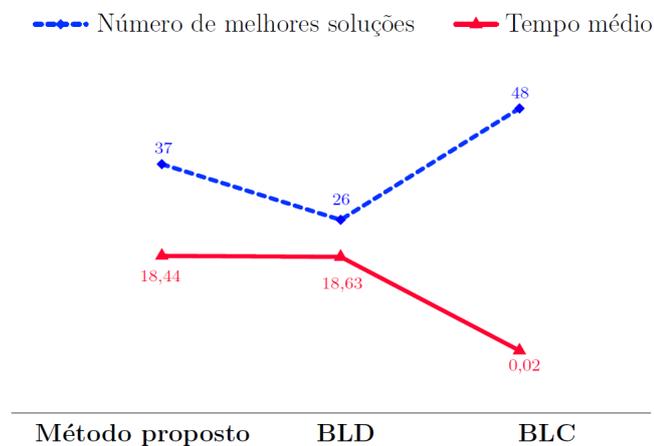


Figura 13 - Gráfico com o número de melhores soluções encontradas e os tempos médios de resolução, em segundos, de cada método para todas as instâncias.

5. Conclusão

Neste trabalho foi abordado o problema de uma indústria de aventais e forros de luva do interior do Estado de São Paulo. O problema estudado pode ser definido como um problema de corte de itens irregulares em recipientes e em faixa. O objetivo é empacotar os itens utilizando o menor número de recipientes possível e minimizar o comprimento utilizado em cada um dos recipientes.

Os itens são representados por polígonos, enquanto que os recipientes são representados por um retângulo com largura e comprimento definidos. Utilizamos os conceitos de *no-fit polygon* e *inner-fit polygon* para a construção das soluções.

Os experimentos computacionais foram baseados em um problema real da indústria de aventais e forros de luva, utilizando três tipos de aventais e um tipo de forro de luva. Aplicamos o método de resolução proposto, a heurística *Bottom-left* discreta e a heurística *Bottom-left* contínua para diferentes demandas, analisando assim seus comportamentos. Utilizamos desde demandas pequenas, com 4 itens, até demandas com 140 itens, que é um número elevado quando se trata de itens irregulares.

Os métodos de resolução obtiveram resultados bastante satisfatórios, já que a taxa de ocupação dos recipientes e o tempo de resolução foram, em média, 83,24% e 9,60 segundos, respectivamente.

Como trabalhos futuros, pretendemos utilizar um modelo matemático para a resolução desse problema, realizar novos experimentos computacionais e aplicar na indústria o método que forneceu melhores resultados.

Agradecimentos

Este trabalho contou com apoio da CAPES, do CNPq (Universal 476792/2013-4) e da FAPESP (Temático 2010/10133-0, CEPID 2013/07375-0 e bolsas 2012/18653-8, 2014/10740-4). Agradecemos os revisores pelos comentários importantes, que contribuíram para a melhoria deste trabalho.

Referências

- Alvarez-Valdes, R.; Martinez, A.; Tamarit, J. M. (2013). A branch & bound algorithm for cutting and packing irregularly shaped pieces. *International Journal of Production Economics*, v. 145, n. 2, p. 463-477.
- Baker, B. S.; Coffman, Jr, E. G.; Rivest, R. L. (1980). Orthogonal packings in two dimensions. *SIAM Journal on Computing*, v. 9, n. 4, p. 846-855.

Bennell, J. A.; Oliveira, J. F. (2008). The geometry of nesting problems: A tutorial. *European Journal of Operational Research*, v. 184, n. 2, p. 397-415.

Elkeran, A. (2013). A new approach for sheet nesting problem using guided cuckoo search and pairwise clustering. *European Journal of Operational Research*, v. 231, n. 3, p. 757-769.

Fischetti, M.; Luzzi, I. (2009). Mixed-integer programming models for nesting problems. *Journal of Heuristics*, v. 15, n. 3, p. 201-226.

Gomes, A. M.; Oliveira, J. F. (2002). A 2-exchange heuristic for nesting problems. *European Journal of Operational Research*, v. 141, n. 2, p. 359-370.

Gomes, A. M.; Oliveira, J. F. (2006). Solving irregular strip packing problems by hybridizing simulated annealing and linear programming. *European Journal of Operational Research*, v. 171, n. 3, p. 811-829.

Halavati, R.; Shouraki, S. B.; Zadeh, S. H. (2008). A novel evolutionary approach for two-dimensional bin packing. *The CSI Journal on Computer Science and Engineering*, v. 6, n. 2-4(b), p. 58-67.

Imamichi, T.; Yagiura, M.; Nagamochi, H. (2009). An iterated local search algorithm based on nonlinear programming for the irregular strip packing problem. *Discrete Optimization*, v. 6, n. 4, p. 345-361.

Leao, A. A.; Toledo, F. M. B.; Oliveira, J. F.; Carravilla, M. A. (2016). A semi-continuous MIP model for the irregular strip packing problem. *International Journal of Production Research*, v. 54, n. 3, p. 712-721.

López-Camacho, E.; Ochoa, G.; Terashima-Marín, H.; Burke, E. K. (2013). An effective heuristic for the two-dimensional irregular bin packing problem. *Annals of Operations Research*, v. 206, n. 1, p. 241-264.

López-Camacho, E.; Terashima-Marín, H.; Ross, P. (2010). Defining a problem-state representation with data mining within a hyper-heuristic model which solves 2d irregular bin packing problems. In: *Ibero-American Conference on Artificial Intelligence*. Springer Berlin Heidelberg. p. 204-213.

Toledo, F. M. B.; Carravilla, M. A.; Ribeiro, C.; Oliveira, J. F.; Gomes, A. M. (2013). The dotted-board model: A new MIP model for nesting irregular shapes. *International Journal of Production Economics*, v. 145, n. 2, p. 478-487.

Umetani, S.; Yagiura, M.; Imahori, S.; Imamichi, T.; Nonobe, K.; Ibaraki, T. (2009). Solving the irregular strip packing problem via guided local search for overlap minimization. *International Transactions in Operational Research*, v. 16, n. 6, p. 661-683.