

UM ESTUDO DE CASO UTILIZANDO MODELOS DE FILAS PARA ANALISAR SISTEMA DE CAIXAS DE SUPERMERCADOS¹

José Gilberto S. Rinaldi^{a*}, Reinaldo Morabito^b

*^aFaculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade Estadual Paulista - UNESP, Presidente Prudente-SP, Brasil*

*^bDepartamento de Engenharia de Produção
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar, São Carlos-SP, Brasil*

Resumo

Em um estudo anterior, mostrou-se por meio de análise estatística multivariada que o tempo de espera na fila de caixas de supermercados desempenha um papel importante para o nível de serviço dos clientes, baseando-se em um estudo de caso em uma empresa do setor. No presente trabalho, revisitam-se e aplicam-se alguns modelos analíticos de filas mais frequentemente utilizados na literatura para representar os sistemas de filas nos caixas de supermercados e estimar o tempo de espera dos clientes nas filas dos caixas, incluindo um modelo que considera possíveis trocas de filas pelos clientes, ocorrência comum na prática dos supermercados. Para analisar o desempenho desses modelos, um estudo de caso foi realizado na mesma empresa do estudo anterior. Comparando-se os resultados desses modelos com os observados numa amostra coletada no estudo de caso, identificou-se que o modelo que melhor representou o sistema real foi o modelo de filas com trocas e que ele pode ser útil para apoiar decisões na prática.

Palavras-chave: Modelo de Filas com Trocas, Avaliação de Desempenho, Estudo de Caso, Sistema de Caixas de Supermercados.

Abstract

A previous study based on a case study at a supermarket indicated by means of multivariate statistical analysis that customer waiting time in line at checkout plays an important role in customer service. In this study we review the literature for some of the analytical queuing models that are most frequently used to represent waiting-line management systems at supermarkets and estimate customer waiting time, including a model that takes into account customers changing lines, a common occurrence at supermarkets. To analyze the performance of these models, a case study has been carried out at the same company of the previous study. The comparison between the results of these models and those observed in a sample collected in this case study indicates that the queuing model in which customers are allowed to change lines best represents the actual system and that it can be useful to support decisions in practice.

Keywords: Queuing Models with Jockeying; Performance Evaluation, Case Study, Checkout Systems in Supermarkets.

*Autor para correspondência: e-mail: gilberto@fct.unesp.br

¹Todos os autores assumem a responsabilidade pelo conteúdo do artigo.

Versão inicial submetida em 26/11/2015. Versão final recebida em 10/08/2016.

1. Introdução

Diante da concorrência crescente, empresas em geral têm se preocupado em melhorar seus desempenhos em relação a vários fatores, seja para ganharem mercado, ampliarem seus negócios ou mesmo como mecanismo de sobrevivência. Assim é essencial que as empresas apresentem boa qualidade nos seus produtos oferecidos ou serviços prestados. Em um sentido mais amplo, quando os clientes realizam uma compra, não estão simplesmente adquirindo um produto, mas estão comprando um conjunto de benefícios que, esperam eles, atendam suas necessidades. Desta forma, é importante a percepção que os clientes têm sobre os benefícios do que foi comprado. Igualmente, é importante para a empresa saber o que seus clientes estão comprando dela em termos de expectativas e satisfação. Para algumas empresas, como é o caso dos supermercados, é importante desenvolver estratégias orientadas para serviços. Estes representam o último elo entre produto e consumidor, vendem predominantemente alimentos perecíveis que estão dispostos em formato para autoatendimento e com caixas de pagamento na saída, tratando-se, portanto, de autosserviço.

Uma preocupação nesse setor é a fidelização de clientes. Contudo, essa conquista, ainda que para uma parcela pequena dos clientes frequentadores, não é facilmente obtida. A fidelização se refere a, praticamente, fazer com que seus compradores quase que desistam de exercer uma busca por melhores condições gerais de compra. Em outras palavras, esses clientes não se atentam às mudanças que podem estar ocorrendo em outros locais, como menores preços e rápido atendimento, e confiam que o lugar escolhido (que os fidelizou) se apresenta naturalmente como a melhor opção. Contudo, sempre há a possibilidade de existir um processo reverso a este, quando algo descontenta o cliente fidelizado, como é o caso de longas filas de espera, conseqüentemente maiores tempos de atendimento (Rinaldi, 2007). Este cliente poderá ficar propenso a reavaliar sua conduta, investigando assim outros locais para efetuar suas compras, desfazendo-se a fidelização.

O cliente de supermercados que tem como primeira opção o preço dos produtos geralmente faz pesquisa antes de realizar uma compra, o que pode ser facilitado pela distribuição de encartes de propaganda fornecidos pelos supermercados. Este cliente, pelo tipo de conduta de compra, é mais difícil de ser fidelizado. Então, a empresa que apostar como estratégia principal no fator preço pode encontrar dificuldades para fidelizar seus clientes e, assim, não alcançar os resultados desejados. Consumidores podem relacionar o alto tempo total gasto no supermercado para realizar compras com falta de organização geral da empresa. No tempo total de permanência do cliente no supermercado, um fator determinante pode ser o

tempo de espera na fila do caixa. Enquanto circula pelo local escolhendo produtos a serem adquiridos, ele está executando algo de seu interesse e cujo tempo pode ser razoavelmente controlado. Contudo, permanecer na fila do caixa em geral é considerado pelo cliente um tempo praticamente perdido, onde ele não executa qualquer tarefa que contribua diretamente com sua compra (Cogan, 1998).

Em Rinaldi (2007) e Rinaldi *et al.* (2009), estudaram-se algumas causas pelas quais clientes frequentavam um supermercado. As características de importância consideradas foram preço de produtos, localização do estabelecimento, rapidez de atendimento, qualidade de atendimento, variedade de produtos, estacionamento e outras características que se apresentaram com menor frequência. Por meio de análise estatística multivariada, foi verificada a relevância de cada causa em contraste com as outras, ou seja, a importância relativa de cada uma. Assim, pôde-se observar que a rapidez de atendimento desempenha um papel importante em relação às demais para o nível de serviço dos clientes no supermercado estudado (foi menos importante apenas que qualidade de atendimento). Utilizando-se análise de agrupamentos hierárquicos de variáveis e análise de correspondência (Bartholomew *et al.*, 2002), associaram-se os clientes mais estudados com preferência a qualidade e rapidez de atendimento. Por outro lado, os clientes menos estudados foram associados com o fator preço. Adicione-se a esse quadro o fato de existir, no Brasil, uma relação significativa entre maior renda com maior escolaridade, ainda que esta relação venha mudando um pouco nos últimos anos. Assim, o estudo associou, de forma conjunta, clientes mais escolarizados com qualidade e rapidez de atendimento e, também, com classes de compras maiores (compram um número maior de itens). Desta forma, esses clientes devem ter sua frequência àquele estabelecimento comprometida com esses fatores, sendo que, por exemplo, esperar muito na fila (deteriorar o fator rapidez de atendimento) pode levar o cliente a considerar outros locais nos quais suas expectativas possam ser atendidas.

Algumas empresas desenvolvem estratégias que procuram minimizar os efeitos da espera na fila. Uma área específica é o gerenciamento das percepções nas filas de espera (Cogan, 1998). Trata-se, basicamente, em captar a atenção dos clientes enquanto esperam de modo que não percebam a passagem do tempo. Em vários locais, técnicas aplicadas a esta área têm obtido alguns resultados satisfatórios, contudo, quando o tempo é importante para o desenvolvimento das tarefas cotidianas, a medição e avaliação do tempo gasto são determinantes ao comportamento dos clientes. Outros estudos levam em consideração até a justiça na prioridade de atendimento e psicologia das filas. Por exemplo, algumas filas podem

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

ser injustas, ou seja, não necessariamente os clientes que chegam primeiro serão atendidos antes. Dependendo das circunstâncias em que ocorre, isto pode enfurecê-los com sérias consequências para a empresa (Larson, 1987). Desta forma, quando se utiliza uma única fila de espera, a tendência é de que o cliente possa ficar mais satisfeito com o serviço prestado. Os supermercados, por problemas relacionados a espaço físico, se utilizam frequentemente de filas paralelas nos caixas. Algumas vezes uma fila única é utilizada para caixas rápidos, por exemplo.

Muito se tem pesquisado para melhoria de atendimento nos supermercados, contudo, os trabalhos voltados para o problema de congestão nas filas dos caixas são menos frequentes na literatura. Alguns exemplos aparecem em Umesh *et al.* (1989), van Dijk (1997) e Morabito e Lima (2004); uma discussão relacionada também aparece em Ittig (1993). Essas filas são responsáveis por grande parte das esperas dos clientes em diversos supermercados e devem ser objeto de estudo quanto ao nível de atendimento desejado em todo sistema prestador de serviço que a possua. Representá-las, modelando-as adequadamente, é fase importante para propor melhorias de desempenho do sistema. Por exemplo, ao aumentar o número de caixas em operação, os custos operacionais do sistema aumentam, mas o tempo de espera em fila dos clientes se reduz, e surge um interessante *tradeoff* a ser analisado entre a escolha de capacidade do sistema e o nível de serviço a ser oferecido. Em grande parte dos estudos e modelagens de múltiplas filas paralelas, os sistemas estudados não consideram a possibilidade dos indivíduos trocarem de fila (processo também conhecido na literatura como *jockeying*), fato comum quando se trata de supermercados. O espaço físico também é fator importante quando da escolha de um sistema de filas. Como exemplo, se um supermercado opera com muitos caixas, pode haver grande limitação ao se considerar uma única fila. Assim, estudos de sistemas de filas em paralelo para atendimento dos clientes são importantes para análise desses sistemas, considerando a ocorrência de trocas de filas por parte dos mesmos.

A aplicação e avaliação de modelos analíticos com fila única e com múltiplas filas em paralelo, com ou sem trocas, em uma situação real, é um interessante problema de pesquisa. Alguns supermercados da região de São Carlos/SP foram contatados quanto ao interesse em colaborar com esta pesquisa e permitir a coleta de dados e realização de estudos de congestão dos caixas. Apesar de algumas recepções positivas, verificou-se um comportamento de resistência por parte de alguns gerentes. Estes apostam, preferencialmente, em preços como uma causa extremamente importante para atração de clientes, alguns deles alegando que a fila não constitui um fator tão importante para a satisfação dos clientes. Admitindo-se que as filas

têm importância (como constatado pelo estudo anterior em Rinaldi *et al.*, 2009), duas hipóteses para este comportamento de resistência podem ser levantadas: a primeira seria a falta de conhecimento da real importância das filas para os clientes e de suas implicações; e a segunda, poderia constituir-se em certa insegurança para uma possível aplicação dos resultados obtidos no local analisado. Para melhorar o sistema de filas é preciso estudá-lo, compreender bem sua real importância, contextualizá-lo na empresa onde este se apresenta, principalmente considerando as opiniões dos clientes. A realização de troca de filas é um procedimento do cliente que procura minimizar seu tempo de permanência na fila. Questões importantes de pesquisa são obtidas, tais como quais informações o cliente avaliou quando fez a troca, e assim qual seria a melhor maneira para representar o sistema de fila do supermercado estudado englobando este novo conhecimento.

O objetivo deste trabalho é analisar e comparar modelos analíticos de filas conhecidos da literatura para representar adequadamente sistemas de filas nos caixas de supermercados e estimar com precisão o tempo de espera na fila em supermercados. Vários modelos de filas são explorados, por exemplo: representar o sistema por meio de um simples modelo $M/M/m$ de fila única, onde m é o número de caixas; representar o sistema por meio de m modelos $M/M/1$ paralelos e independentes; representar o sistema por meio de simples variações dos dois modelos anteriores em que o tamanho das filas é limitado; representar o sistema por meio de um modelo Markoviano mais geral, em que todos os modelos anteriores podem ser vistos como casos particulares. Estes modelos também foram objeto de estudo de outros trabalhos, como por exemplo em Morabito e Lima (2000, 2004), mas envolvendo situações com um menor número de caixas do que no presente trabalho. Para analisar o desempenho desses modelos, um estudo de caso foi realizado no mesmo supermercado do estudo anterior em Rinaldi *et al.* (2009). Em particular, para o modelo de filas com trocas, são avaliadas as causas que determinam as trocas realizadas pelos clientes. Uma questão interessante a ser considerada se refere a se o cliente avalia somente o número de pessoas na fila para efetuar este procedimento. Como discutido adiante, isto de fato pode ocorrer, pois poucos clientes revelaram ter observado a quantidade de trabalho a ser processada a sua frente na amostra desse estudo de caso.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: na seção 2 descreve-se o experimento realizado e detalhes do processo de coleta de dados. Na seção 3 revisam-se brevemente os modelos de filas aplicados neste estudo. Na seção 4 verifica-se a validade das suposições dos modelos aplicados e na seção 5 analisam-se os resultados obtidos com a

aplicação dos modelos. Finalmente, na seção 6 apresentam-se as conclusões deste estudo e algumas perspectivas para pesquisa futura.

2. O Experimento Realizado e a Coleta de Dados

No planejamento e condução de uma coleta de dados várias fases devem ser realizadas para que se obtenha uma amostra representativa do fenômeno a ser estudado. Uma fase importante é relativa à obtenção de uma amostra piloto. A finalidade de uma amostra piloto, geralmente, é de testar os instrumentos de coleta de dados e verificar se o tamanho amostral proposto é adequado (Bolfarine e Bussab, 2005). Desta forma, no estudo de caso do supermercado desenvolvido neste trabalho foi realizada inicialmente uma amostra piloto em uma sexta-feira, durante um período de duas horas (das 18h às 20h). Assim, pôde-se observar que, para o referido dia e horário, havia (como antecipado pelo gerente) uma boa frequência de clientes, com formação de filas nos caixas. Uma filmadora foi localizada diagonalmente com o objetivo de filmar todas as doze filas, captando chegadas, términos de serviços e trocas de filas realizadas pelos clientes. Constatou-se, contudo, que apenas uma filmadora poderia ser insuficiente para todas as filas e, então, propôs-se ao supermercado utilizar duas ou mais filmadoras, na filmagem, o que foi recusado sob a alegação de que poderia haver cerceamento de liberdade e constrangimento aos clientes. Disposto isto, decidiu-se manter apenas uma filmadora como auxílio à coleta das mesmas informações, contudo, passou-se a utilizar também planilhas a serem preenchidas por pessoal treinado, o que foi aceito pela empresa.

Com base nos resultados da amostra piloto, uma coleta de dados foi realizada em dias pré-determinados e no período de duas horas por dia, por serem considerados (baseado na experiência do gerente e em dados do supermercado) como períodos de grande fluxo e de clientes com perfil característico (vide Tabela 1). Para obter as informações necessárias, foi preciso utilizar-se uma planilha preenchida manualmente. Para que esta pudesse atender às necessidades da pesquisa, inicialmente, ela deveria conter o instante de chegada dos clientes na fila, o instante de início do serviço nos caixas e o instante de término do serviço, quando o cliente se retira do sistema. Dever-se-ia também anotar o instante de duas outras ocorrências, que eram a desistência e a troca (*jockeying*) de filas pelos clientes. Ainda, qualquer fato que pudesse afetar o andamento do experimento e, portanto, os resultados da planilha, deveriam ser anotados, como, por exemplo, se o operador de caixa parasse o atendimento. Como cronômetro foi utilizado um computador ligado a dois monitores, nos quais estava aparente a passagem do tempo da coleta; a única informação utilizada era um relógio com horas, minutos

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

e segundos. Neste computador estava acoplado um cabo de monitor que dividia o sinal em duas saídas (um divisor de frequências) para utilização de dois monitores, cada um distante cerca de 5 metros por meio de cabos extensores interligados, com 1 metro de comprimento cada. Não houve prejuízo de sinal devido às extensões e a imagem do cronômetro nos monitores apresentava excelente definição, podendo ser vista perfeitamente a distância.

Tabela 1: Informações gerais sobre a coleta de dados do experimento.

Dias	Horário
03/12 (sexta-feira)	18h às 20h
04/12 (sábado)	10h30min. às 12h30min.
05/12 (domingo)	10h30min. às 12h30min.
10/12 (sexta-feira)	18h às 20h
11/12 (sábado)	10h30min. às 12h30min.
12/12 (domingo)	10h30min. às 12h30min.

Nos dias de coleta estavam em funcionamento quatro caixas rápidas (denotados por R) e oito normais (denotados por N), sendo que havia ainda a possibilidade de abertura de mais quatro caixas, o que não ocorreu durante os períodos de coleta devido às necessidades desses períodos, conforme o planejamento da gerência. De acordo com o gerente, haviam outros períodos de pico de operação do supermercado em que seriam necessários mais caixas, mas estes períodos ocorriam com pouca frequência, não correspondendo a períodos típicos de grande fluxo e de clientes com perfil característico. É importante ressaltar que os dois tipos de caixas (rápidas e normais) eram operacionalizados com filas paralelas e de ambos foram coletados os dados referentes a esse estudo (é comum, em grandes supermercados, os caixas rápidos terem uma única fila, o que não ocorreu nesse estudo). Os responsáveis pela coleta de dados de tempos (denominados coletores) se posicionavam próximos às gôndolas e em frente aos caixas, sem obstruir as filas. Cada coletor tinha sob sua responsabilidade uma das filas de caixa rápido ou da preferencial, sendo então alocados quatro deles para esta finalidade. Para os oito caixas normais, utilizaram-se quatro coletores, ou seja, cada um era responsável simultaneamente por duas filas adjacentes. Para a realização do experimento, o computador foi ligado a um *nobreak* e colocado em funcionamento 20 minutos antes do seu início. Para poder acoplar o segundo monitor, era necessário esperar todo o processo de inicialização do computador, caso contrário não havia sinal (imagem), pois os monitores tinham marcas e

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

configurações diferentes, o que gerava certa incompatibilidade. Além disso, uma filmadora era disparada por controle remoto imediatamente quando o cronômetro do computador chegava ao horário especificado para início da coleta, registrando o andamento das filas. A filmagem se dava em formato longo, com gravação de tempo em horas, minutos e segundos. Procedendo assim, os cronômetros apresentavam pouquíssima diferença e quando algo estranho ocorria, como um erro de anotação na planilha ou alguma observação sobre algum fato, podia-se ser auxiliado pela imagem, efetuando-se a correção, se necessária.

O objetivo desta preparação foi a de que todos os coletores utilizassem o mesmo cronômetro, evitando possíveis discrepâncias que poderiam ocorrer se utilizadas várias unidades (um cronômetro para cada coletor, por exemplo). Também, evitava-se qualquer manuseio deste equipamento, facilitando o decorrer do experimento. Ao iniciar a coleta de dados, os coletores começavam o preenchimento da planilha com o próximo cliente a entrar na fila, com seu instante de chegada. A partir de então, este era acompanhado e os próximos clientes que entrassem na fila tinham suas informações anotadas. Devido a este fato, o cliente em atendimento e os que já se encontravam na fila antes do horário previsto para o início da coleta, não poderiam pertencer à amostra. Também, deve-se ressaltar que as chegadas são formadas pelos clientes que entram nas filas (denominada entradas) e pelos clientes que desistem das compras (perdas), devido, por exemplo, ao número de clientes esperando na fila. Estes últimos, pela natureza do experimento, não foram observados e os clientes que desistiram após entrar na fila foram em número insignificante em relação ao total coletado.

Na Figura 1 pode-se obter uma melhor compreensão do experimento. Os clientes entravam no supermercado por meio de dois acessos, por uma rampa do estacionamento coberto e por uma entrada no mesmo nível do piso do supermercado (setas verdes); em seguida, se dirigiam às gôndolas onde selecionavam os itens a serem comprados. Posteriormente, dirigiam-se para as filas do caixa segundo o número de itens a serem adquiridos. Após a compra se retiravam (setas laranjas) pelos mesmos locais de acesso.

Devido à condição de privacidade dos clientes e para não constrangê-los no supermercado, foi construída uma caixa de madeira para a filmadora não ficar aparente. Esta caixa era constituída por uma base quadrada de 32 centímetros e com 35 centímetros de altura, o interno pintado de preto fosco para não propagar luz e a frente com vidro especial espelhado não permitindo visão de seu conteúdo.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Legendas: M1: (:monitor 1 com cronômetro); M2 (monitor 2 com cronômetro).
 CPU (relógio com precisão em segundos).
 E1 (entrevistador 1); E2 (entrevistador 2).
 R (caixa rápido); P (caixa preferencial); N (caixa normal).
 Fi (fila i; i = 1, 2, ...,16).
 Ci (coletor i; i = 1,2,....., 8).

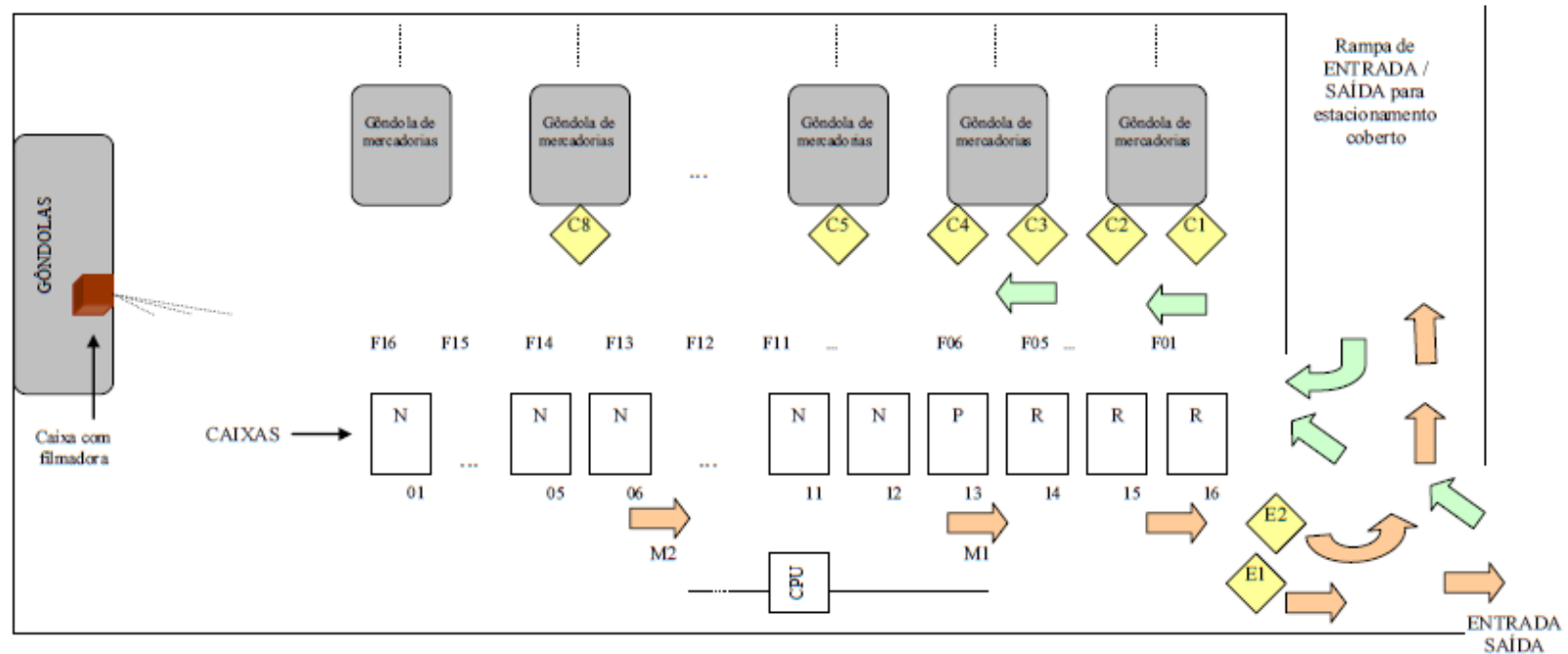


Figura 1- Representação do supermercado: posição dos caixas, entrevistadores, coletores e monitores.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

A tampa da caixa de madeira se encontrava atrás com fechamento por velcro colado (vide Figuras 2 e 3). Não foi notado qualquer cliente observando a caixa durante as filmagens. Esta ficava alocada no alto de uma das prateleiras, quase imperceptível. Aos operadores de caixa foi informado que a filmagem era relativa somente aos clientes na fila e não aos caixas, despreocupando-os de qualquer problema que estes pudessem imaginar com relação à avaliação de seus desempenhos durante as filmagens. Esta ficava alocada no alto de uma das prateleiras, quase imperceptível.

Devido à impossibilidade de se utilizar duas ou mais filmadoras para a coleta de dados, conforme descrito anteriormente, houve a necessidade de contratação e treinamento de pessoal para a realização de tal tarefa. Foram, então, contratadas oito pessoas para atuarem como coletores, ou seja, eram responsáveis pelo preenchimento dos dados da planilha. Os coletores selecionados tinham experiência de coleta de dados realizada por meio de planilhas em empresas do setor privado. Os requisitos solicitados eram de que estas pessoas fossem rápidas, atentas, tivessem disciplina no cumprimento de horários, conduta e postura ética, soubessem utilizar planilhas estatísticas e, principalmente, conhecimento sobre a importância que os dados representam para uma pesquisa desta natureza.



Figura 2 - Visão frontal da caixa para a filmadora.



Figura 3 - Visão interna da caixa com a filmadora.

3. Alguns Modelos de Filas e o Modelo com Trocas

Uma fila, de forma geral, possui seis características, denotadas como $A/B/m/C/N/K$ (Gross e Harris, 1974), nas quais A denota a distribuição dos tempos entre chegadas sucessivas, B denota a distribuição dos tempos de serviço, m denota o número de servidores em paralelo, C denota a disciplina da fila, N denota o número máximo de usuários no sistema (entre fila e atendimento) e K denota o tamanho da população, referente a usuários disponíveis. As notações A e B , por exemplo, podem indicar distribuição exponencial (denotada por M , de Markov, sem memória). A disciplina pode ser $FCFS$ (quem chega primeiro é atendido primeiro, situação usual) ou outra. Também, K e N podem ser considerados variando de 1 a ∞ , conforme as características do modelo a ser denotado. Quando a notação C está ausente, isto significa $FCFS$. Também, quando há a ausência de K e/ou N , o mesmo pode ser considerado como ∞ . As Figuras 4 e 5 ilustram, respectivamente, um sistema $M/M/m$ com fila única e um sistema com m filas $M/M/1$ paralelas (também denotadas por $[M/M/1]^m$) (Mitrani, 1998), situações frequentemente encontradas em supermercados, quando é razoável considerar as distribuições de chegada (sem perdas) e serviço dos usuários como exponenciais negativas. Ainda, duas outras variações podem ser consideradas: o modelo de fila $M/M/m/FCFS/N$ (ou simplesmente $M/M/m/N$) e o modelo de fila $[M/M/1/FCFS/N]^m$ (ou simplesmente $[M/M/1/N]^m$). Estas situações consideram restrições de espaço físico para o tamanho das filas do supermercado, tornando os modelos anteriores com capacidade limitada na fila e conseqüentemente com perdas.

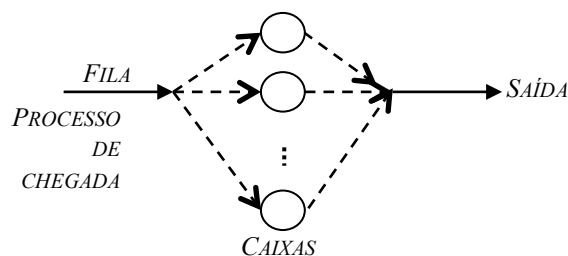


Figura 4 - Sistema $M/M/m$ de fila única.

Outra situação encontrada na literatura é considerar as m filas $M/M/1/N$ paralelas, podendo haver a troca de fila (*jockeying*) por parte dos clientes, toda vez que houver motivação para que isso ocorra. Em sistemas de filas com mais de um servidor é comum (quando não há algum impedimento) que os clientes possam executar a troca de filas. Na prática, estas trocas entre filas podem reduzir as vantagens de se adotar um sistema de fila

única, conforme observado em Rothkopf e Rech (1987). Também, quando os servidores são idênticos e as filas não são completamente observáveis, a troca pode envolver um custo relativo à informação referente a qual delas tem menor tamanho (Hassim e Havin, 2003). Ainda, outra situação mais comum é quando as filas são observáveis e os usuários que estão em uma delas observam que em alguma outra o atendimento está mais rápido. Consequentemente esta fica com menor tamanho, levando algum usuário a se deslocar para ela, trocando então de fila (Ibe, 2009). Os modelos de filas com trocas são mais complexos e têm sido menos estudados nas literaturas especializadas, apesar de suas importâncias. Alguns trabalhos podem ser encontrados efetuando trocas segundo prioridade das filas (Xie *et al.*, 2009). Outros trabalhos apresentam filas paralelas com servidores que podem ser heterogêneos, contudo não permitem troca de filas (Kobayashi *et al.*, 2013). Há também trabalhos com servidores heterogêneos e que permitem trocas, contudo, apenas para duas filas paralelas e com capacidade limitada, como em Tarabia (2008). O espaço físico pode ser um fator importante quando da escolha de um sistema de filas. Como exemplo, se um supermercado opera com muitas caixas, pode haver grande limitação ao se considerar uma única fila. Há trabalhos que utilizam outras técnicas para abordar filas com trocas, como é o caso da aproximação da matriz analítica, que fornece como resultado o decaimento da cauda da distribuição estacionária para o modelo de fila (Sakuma, 2010). Também, as trocas entre filas para maximizar a posição dos clientes podem ser função de preço e comprimento da fila (Li *et al.*, 2012), contudo, dada a complexidade da situação, utilizam-se somente duas filas paralelas.

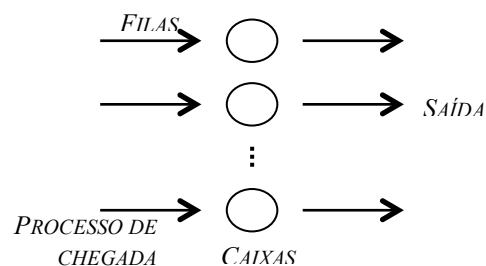


Figura 5 - Sistemas de filas $M/M/1$ paralelas.

No modelo da Figura 4, o sistema de fila representado é Markoviano e envolve m caixas atendendo em paralelo com uma única fila e disciplina $FCFS$. Deve-se considerar a taxa média de chegadas λ (clientes por unidade de tempo) e que os caixas são idênticos e independentes, ou seja, tem a mesma capacidade de atendimento, com taxa média μ (clientes

por unidade de tempo) e o funcionamento de um não interfere em outros. Este sistema de filas é considerado de simples análise e, em equilíbrio, várias medidas de desempenho podem ser obtidas (Kleinrock, 1975; Arenales *et al.*, 2015). A medida de maior importância para este estudo é o tempo médio de espera na fila, denotada por W_q (vide expressão no Anexo). Apesar desse modelo de fila ter análise simples e ser justo, ele pode ser pouco realista no problema dos caixas normais, pois os supermercados geralmente não possuem espaço físico para que seja formada uma única fila. Contudo, como dito anteriormente, é comum que se utilize uma única fila para os caixas rápidos em grandes supermercados, o que não ocorreu no supermercado estudado.

A situação que comumente se observa no problema dos caixas normais é a utilização de filas paralelas, ou seja, uma fila para cada caixa, como ilustrado na Figura 5. Neste caso, admite-se que os caixas sejam, supostamente, idênticos e independentes, cada um com taxa de serviço μ , e por simplicidade considera-se a taxa de chegada $\lambda = \lambda / m$ para cada uma das m filas. Neste caso supõe-se que, uma vez que o cliente entrou em uma fila, ele não mudará para outra. Assim, como o modelo anterior, esse modelo $[M / M / 1]^m$ também é de simples análise e várias medidas de desempenho podem ser obtidas, dentre as quais W_q (vide expressão no Anexo). Ele é mais realista para representar sistemas de caixas normais de supermercado do que o primeiro, contudo, além de não ser o mais justo, não prevê que o cliente possa escolher em que fila entrar e realizar a troca quando julgar vantajoso, o que é comum de ocorrer na prática. Deve-se ressaltar ainda que nenhum dos dois modelos considera que o cliente possa simplesmente desistir das compras, o que acontece quando este julga que as filas estão maiores do que ele toleraria. Pensando-se assim, poder-se-ia considerar os dois modelos anteriores com limitação de capacidade (i.e., os modelos $M/M/m/mN$ com fila única e o modelo com múltiplas filas $[M / M / 1 / N]^m$), ou seja, supor que clientes que chegam no sistema entram no sistema até que as filas tenham um número máximo de N pessoas (em serviço e fila); caso contrário, ao chegarem desistem de entrar no sistema e são considerados perdidos para o sistema, ou seja, desistem das compras. Nestes casos a taxa média de chegadas λ não coincide com a taxa média de entrada λ_E no sistema. Note que esses dois modelos levam ao mesmo número máximo de clientes no sistema, ou seja, mN . As medidas de desempenho para esses modelos também podem ser facilmente obtidas (Gross e Harris, 1974; Arenales *et al.*, 2015), dentre as quais W_q (vide expressão no Anexo).

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Modelo com trocas: um modelo mais geral e completo, e possivelmente mais realista para os caixas de supermercados do que os anteriores, foi proposto em Morabito e Lima (2000, 2004), considerando a desistência do serviço e a troca de filas pelos clientes nas m filas $M/M/1/N$ paralelas. Esse modelo com trocas foi baseado numa extensão do modelo “*teller’s windows with jockeying*” em Koenigsberg (1966). Desta forma, este modelo pode se tornar mais próximo da situação na qual os supermercados geralmente operam. Apesar de ainda não ser completamente justo, permite, como realmente ocorre, que o cliente troque de filas na tentativa de abreviar seu tempo de espera. A proposta deste modelo, em sua formulação, é englobar algumas características que ocorrem na prática em filas de supermercados, que alguns modelos abordam de forma isolada. Inicialmente, algumas considerações devem ser realizadas. Conforme depoimentos de alguns gerentes, em supermercados é bastante comum que quando os clientes encontram um dado número de pessoas na fila, eles desistam de comprar. Desta forma, considera-se que a partir de N pessoas, contadas entre fila e serviço, os clientes que chegam se retiram do estabelecimento sem efetuar suas compras (vide Figura 6). Também, se a diferença de usuários entre duas filas estiver maior que um determinado número, diga-se k , os consumidores trocam de fila na tentativa de abreviar sua espera. Ainda, se o consumidor que chega decidir entrar na fila, o fará onde considera que irá demorar menos. Existe algum subjetivismo em fixar um valor para N , pois o comportamento para desistência pode variar de um cliente para o outro. Também, o valor de k pode variar de acordo com a expectativa e a quantidade de tempo disponível do cliente no instante de decisão. Contudo, aqui também é fixado um valor para N , a ser definido em situação prática, e quando houver uma diferença maior que a estipulada (k) entre duas filas, o modelo considera que o cliente necessariamente efetuará a mudança para a fila menor.

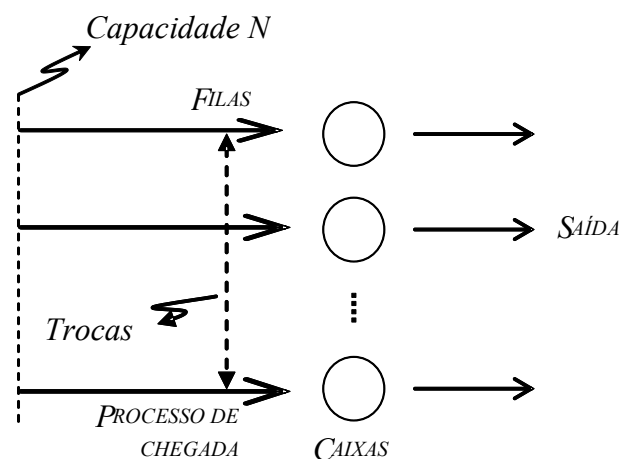


Figura 6 - Filas $M/M/1$ paralelas com trocas.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

O espaço de estados do sistema, denotado por (n_1, n_2, \dots, n_m) , é referente ao número de clientes encontrados em cada um dos m caixas em um dado instante. Cada n_i define o número de clientes no caixa i , para $i=1,2,\dots,m$. A partir da forma com que está sendo considerado o modelo, pode-se observar que, para todo caixa i , $0 \leq n_i \leq N$, e o espaço de estados pode ser definido por: (n_1, n_2, \dots, n_m) , no qual $0 \leq n_i \leq N$ e $|n_i - n_j| \leq k$ para $i \neq j$ e $i, j = 1, 2, \dots, m$. Observa-se destas duas condições que não se permite que nenhum caixa tenha mais que N clientes (em fila e em serviço) e, que nenhum dos caixas possa ter, entre si, uma diferença no número de clientes maior que k . Como exemplo, se $m=4$, $k=1$ e $N=3$, um possível estado é $(1,2,2,1)$ e um estado impossível é $(1,2,3,1)$. Convém observar que os modelos anteriores das Figuras 4 e 5 podem ser vistos como casos particulares do modelo com trocas da Figura 6. Pode ser mostrado que o modelo $M/M/m$ com fila única é o caso particular do modelo com trocas quando $k=1$ e $N=\text{infinito}$. Por outro lado, o modelo com m sistemas de fila $M/M/1$ paralelos é o caso particular do modelo com trocas quando $k=\text{infinito}$ e $N=\text{infinito}$. E os modelos baseados em um sistema $M/M/m/N$ com fila única e em m sistemas $M/M/1/N$ também podem ser vistos como casos particulares do modelo com trocas quando $k=1$ e $k=\text{infinito}$, respectivamente.

Neste modelo de fila com trocas, podem ocorrer mudanças do estado atual de duas formas. Estas se referem a dois instantes, nos quais é possível transições entre os estados: no instante de chegada de um novo cliente e no instante em que algum cliente termina de ser servido e deixa o caixa. No primeiro, o cliente chega e, se não houver saturação do sistema, entra em qualquer uma das filas menores, com probabilidades iguais. No segundo, o cliente deixa o sistema e, dependendo do estado em que o sistema fica quando da saída, isto pode envolver também alguma troca de clientes nas filas. Escrevendo-se as equações de equilíbrio para cada possível estado do sistema (n_1, n_2, \dots, n_m) , com: $n_i \leq N$, $|n_i - n_j| \leq k$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, m$, e substituindo-se uma destas equações pela equação representando a soma das probabilidades de todos os estados igual a 1 (para evitar um sistema indeterminado), obtemos um sistema linear com, no máximo, $(N+1)^m$ equações e incógnitas (lembre-se que temos a condição adicional $|n_i - n_j| \leq k$ que, dependendo do valor de k , reduz o tamanho do sistema). Observa-se neste modelo que os clientes, quando observam que podem trocar para uma fila menor, o fazem com probabilidade um, mas há estudos que foram realizados com filas paralelas e com *jockeying* probabilístico (Ferrari, 2002).

Em Morabito e Lima (2004), o modelo com trocas foi testado considerando-se um experimento em que haviam menos caixas (cinco caixas normais e dois caixas rápidos) do que no presente estudo, com fatores de utilização 0,65 e 0,45, respectivamente. A coleta de dados se deu com uma única amostra, em um sábado das 14:00 as 18:00 horas, sendo testadas as suposições de igualdade das médias de tempos entre chegadas para os caixas normais e rápidos, e também as suposições de distribuições exponenciais para os tempos entre chegadas e os tempos de serviço dos caixas normais e rápidos ao nível de 5% de confiança. O modelo $M/M/m/mN$ com fila única e o modelo com múltiplas filas $[M/M/1/N]^m$ foram utilizados como objeto de comparação com o modelo com trocas.

4. Aplicação dos Modelos no Estudo de Caso

Conforme mencionado, para a coleta dos dados nas filas dos supermercados foram utilizadas as filmagens realizadas e planilhas contendo informações como: tempos entre chegadas de clientes na fila, tempos de serviço dos clientes nos caixas, instantes das trocas de fila pelos clientes e as condições em que elas foram realizadas. Para aplicar e comparar os modelos analíticos de filas da Seção 3 também foram utilizadas rotinas que fornecem algumas medidas de desempenho (Wolff, 1989; Kleinrock, 1975; Arenales *et al.*, 2015) que permitem analisá-los, originando assim subsídios que apontaram aquele que melhor representou a fila real investigada. Pôde-se notar que o número máximo de pessoas nos caixas rápidos e normais, ainda que em raras oportunidades, foram respectivamente 7 e 5. Além disso, pouquíssimos clientes desistiram quando já tinham entrado na fila, desta forma, as perdas reais do local estudado podem ser consideradas desprezíveis. Em consequência desses fatos, ao invés de serem utilizadas as taxas de chegada, por simplicidade foram utilizadas as taxas de entrada para todos os modelos estudados e aplicados. Para a utilização dos modelos de filas apresentados, é preciso que as suposições que os suportam sejam verificadas na aplicação prática. Para tanto, algumas considerações são relatadas a respeito dos processos de chegada e de serviço dos clientes no sistema. Para testar as suposições que envolvem distribuições de probabilidade dos tempos entre chegadas de clientes e dos tempos de serviço dos clientes nos caixas, foi utilizado o *software* BestFit 4.0 da Palisade Tools. Este *software* fornece a distribuição que melhor se ajusta aos dados com base nos testes não-paramétricos Qui-Quadrado, Kolmogorov-Smirnov e Anderson-Darling (Conover, 1999). Desta forma, os testes podem ser realizados obtendo-se relativa segurança nas conclusões sobre as distribuições de probabilidade admitidas nos modelos.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Processos de chegada: para esses processos foram considerados duas hipóteses, a primeira é dos tempos entre chegadas terem uma densidade exponencial negativa e a segunda é se há uma uniformidade das chegadas, ou seja, é testado se a distribuição de chegada dos clientes nos distintos caixas é equitativa. A hipótese de densidade exponencial foi testada utilizando-se o software BestFit, com os três testes estatísticos, Qui-Quadrado, Kolmogorov-Smirnov e Anderson-Darling. A hipótese de uniformidade foi testada por meio do teste Qui-Quadrado, apto para esta finalidade. O nível de confiança utilizado foi de 5% de confiança e a hipótese testada foi aceita para todos os caixas, com exceção de um caixa normal, que não teve densidade exponencial por motivo de ter apresentado um *outlier* muito grande (que retirado deixava a suposição válida). Resolveu-se manter esse ponto, pois é o que ocorre no cenário real e, também, com o objetivo de verificar a robustez dos modelos.

Tempos de serviço: para estes também foram considerados duas hipóteses, a primeira dos tempos de serviço terem uma densidade exponencial negativa, o que foi verificado (com nível de significância de 5%) e satisfeito, utilizando-se também o BestFit. A outra hipótese, bem importante, é a de igualdade para as médias dos tempos de serviço dos caixas, verificada por uma análise de variância (ANOVA) e satisfeita tanto para os caixas normais, como para os rápidos, com nível de significância menor que 5%, portanto, bastante seguro. Isto provavelmente se deve ao fato de que os caixas utilizam leitores com códigos de barras, deixando os níveis de serviço bem próximos. Sem essa suposição verificada, não se poderia considerar os caixas idênticos e os resultados poderiam ficar comprometidos.

Deve-se investigar ainda o comportamento das taxas de entrada no que se refere a sua estabilização no decorrer do tempo em que a amostra foi coletada, tanto para os caixas normais como para os rápidos. O período de coleta de 2 horas foi dividido em quatro partes e as taxas foram recalculadas, para cada parte, e dispostos em dois gráficos (Figuras 7 e 8), para analisar seus comportamentos. Como ilustração, são apresentados os resultados para os dias 3, 4 e 5, contudo, nos outros dias houve comportamento similar a estes. Na Figura 7 pode-se perceber que existe um comportamento um pouco distinto para o dia 4 de dezembro, pois este apresenta uma taxa de entrada relativamente inferior aos demais dias. Também, analisando-se o comportamento no decorrer no período de duas horas em suas quatro divisões (partes 1,2,3 e 4 na Figura 7), pode-se considerar que não houve variação significativa das taxas durante o período de coleta. Caso contrário, poder-se ia tratar de um processo não estacionário, onde a taxa de entrada poderia ser descrita na forma $\lambda_E(t)$. Observando-se a Figura 8, nota-se que

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

existe um comportamento com relativa variação, para a taxa de entrada dos caixas rápidos, somente para o dia 4 de dezembro, um sábado. Apesar disto, esta parece não ter tendência em estar apenas crescendo ou apenas declinando no decorrer do período. Desta forma, pode-se também considerar as taxas relativamente estáveis para o período de coleta.

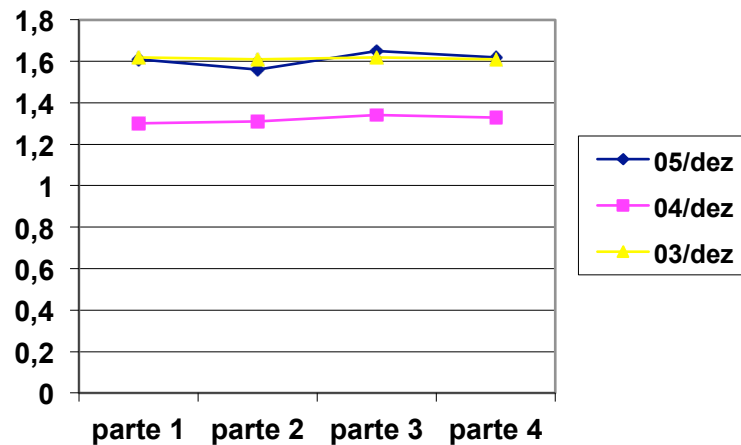


Figura 7 - Variação da taxa de entrada para os caixas normais nos períodos de coleta.

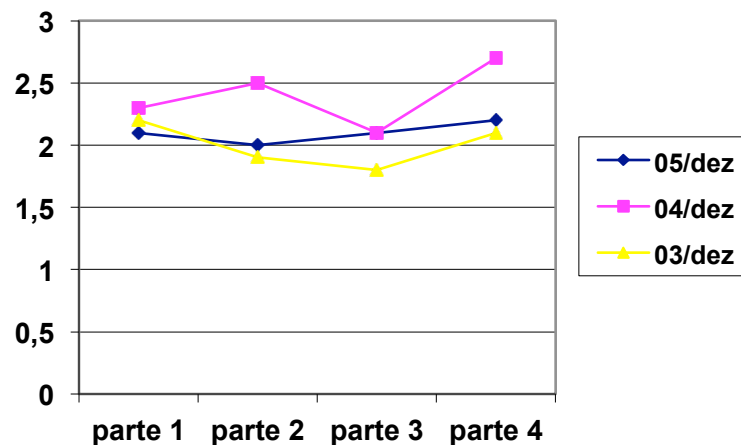


Figura 8 - Variação da taxa de entrada para os caixas rápidos nos períodos de coleta.

No caso do modelo de filas com trocas, a análise é baseada em um processo de trocas de clientes nas filas, logo é preciso verificar também se isso de fato ocorreu nas amostras coletadas. É necessário então verificar o quão frequente o cliente realiza a troca, e se este realmente é um fator que deve ser englobado nas análises como importante. No supermercado estudado isto foi obtido de duas formas: perguntando ao cliente em um questionário, e

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

observando e anotando as trocas nas filas dos caixas, sendo esta última apresentada nos três primeiros dias de coleta, na Tabela 2. O resultado para as porcentagens do número de trocas de filas, em primeira análise, não pareceu muito consistente com o tipo de caixa na qual está o cliente. Nos caixas normais onde, em média, os tempos de fila e em serviço são maiores que nos caixas rápidos, os clientes poderiam obter considerável diminuição do tempo total de espera efetuando a troca para uma fila menor, contrariamente ao resultado obtido. Contudo, as filas dos caixas rápidos têm um menor tempo médio de espera, ou seja, existe mais dinamismo (trocas de estados) nas filas e as oportunidades de trocas podem aparecer, com maior frequência, sendo uma possibilidade de explicação ao resultado obtido.

Tabela 2: Porcentagens de trocas de filas observadas segundo o tipo de caixa e dias de coleta.

Dia	Caixas Normais	Caixas Rápidos
3/12	4,2%	9,4%
4/12	7%	12,1%
5/12	8,5%	10,5%

Considerando-se o total de trocas (para todos os dias), a porcentagem aferida na coleta de dados observando-se as filas foi de 8,3%. No questionário aplicado aos clientes, também foi perguntado se estes haviam realizado alguma troca de filas e a porcentagem obtida foi de 8,2%, revelando muita coerência nas informações prestadas e as observadas nas filas. Desta forma, pode-se considerar que para o cliente, pelo fato de lembrar-se devidamente das trocas, estas podem ser interessantes. Acredita-se, então, que as trocas são importantes como reguladoras do tamanho das filas, uniformizando-as. No momento que o cliente chega e se junta à fila mais conveniente e/ou quando realiza uma troca, ele faz com que as filas não tenham tamanhos tão distintos, diferenciando o modelo que as engloba dos demais. Para todas as análises foi considerado como aceitável um nível de significância de 5%.

5. Análise dos Resultados dos Modelos

A principal finalidade deste trabalho foi analisar o potencial de aplicação dos modelos de filas aqui considerados no sistema estudado e estabelecer uma análise comparativa entre esses modelos. Como citado anteriormente, foram realizadas coletas em um supermercado do interior paulista, em seis dias distintos, pelo período de duas horas (de acordo com a Tabela 1). As principais informações desta etapa, como datas, tipos de caixas, taxas médias de

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

entrada e serviço, níveis médios de utilização dos caixas, tamanhos amostrais e tempos médios de espera na fila (observados na amostra) podem ser encontrados na Tabela 3.

Tabela 3: Tipo de caixa (normal e rápido), taxas de entradas e serviço, a proporção de servidores ocupados, tamanho amostral e tempo médio de espera real na fila, nas duas semanas de coleta.

Dia	Tipo de caixa	λ_E clientes/ min	μ clientes/min	$\frac{\lambda_E}{m\mu}$	Tamanho Amostral	Tempo de espera (min)
03	N	1,6039	0,2384	0,841	194	1,80
	R	1,8196	0,6250	0,728	220	1,43
04	N	1,3182	0,1880	0,878	159	3,36
	R	2,3785	0,6693	0,888	287	1,82
05	N	1,6058	0,2336	0,859	195	1,85
	R	2,0803	0,6228	0,835	253	1,61
10	N	1,4174	0,2182	0,812	179	1,39
	R	1,7311	0,6130	0,706	209	1,24
11	N	1,3429	0,1901	0,883	168	3,63
	R	2,4239	0,6718	0,902	297	2,19
12	N	1,6099	0,2254	0,893	202	2,92
	R	2,2399	0,6272	0,893	266	2,64

Na Tabela 4 encontram-se os resultados para os modelos de filas $M/M/m$ e $[M/M/1]^m$, para os mesmos dias e parâmetros dos dias de coleta em duas semanas, constando do tempo médio de espera na fila (W_q) para cada modelo com seus respectivos desvios (desvio da razão entre o valor modelado e o observado, em porcentagem) em relação ao valor observado na amostra. Pode-se notar a diferença existente nas estimativas entre a fila $M/M/m$ (com fila única) e a fila $[M/M/1]^m$ (com filas paralelas independentes). Neste caso, desconsiderar a dependência existente nas filas traz grande vício na estimação dos tempos de espera na fila. Desta forma, ainda que com estimativas alternantes em sua qualidade, o modelo de fila única tem melhores resultados. Nota-se na Tabela 4 que o modelo $[M/M/1]^m$ em geral superestima o tempo de espera na fila. Deve-se ressaltar ainda que, conforme mencionado anteriormente, o modelo $M/M/m$ é um caso particular do modelo com trocas quando $k=1$ e $N \rightarrow \infty$ para o primeiro momento (em média). Também, o modelo $[M/M/1]^m$ é um caso particular do modelo com trocas quando $k \rightarrow \infty$ e $N \rightarrow \infty$.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Outra possibilidade de modelagem seria realizar o mesmo experimento considerando-se uma capacidade máxima para as mesmas filas em questão. É natural, então, que esta capacidade seja equivalente ao que é considerado no modelo com trocas, para efeito de comparação. É importante ressaltar que existe certo subjetivismo para o modelo com trocas em fixar o valor de N , ou seja, em considerar a capacidade máxima das filas. No caso do supermercado, como discutido anteriormente, os clientes ficam em pé com suas compras em carrinhos ocupando um espaço físico considerável, dependendo do tamanho da fila. Também, de acordo com informações obtidas do gerente daquele supermercado, nos caixas normais, os clientes reclamam quando as filas têm mais de três pessoas. Como considerado anteriormente, observando-se as planilhas e as filmagens realizadas para a coleta de amostras, pôde-se assumir o máximo de pessoas nos caixas rápidos e normais como 7 e 5, respectivamente. Também, observou-se que os clientes trocaram de fila para ganhar uma posição ($k=1$) nos caixas normais (N) e duas posições ($k=2$) nos caixas rápidos (R) e estes valores foram assumidos na aplicação do modelo com trocas, descrito a partir do próximo parágrafo. Os resultados podem ser vistos na Tabela 5, na qual constam os valores de W_q e de seu desvio. Novamente, como para o caso anterior, o modelo que trata o sistema como com filas paralelas independentes tem o problema de superestimar o tempo de espera na fila. Também o modelo $M/M/m/mN$ tem alternância de estimativas (ainda que mais suaves), assim como ocorria com o modelo $M/M/m$. Contudo, nota-se que os desvios para o modelo $[M/M/1/N]^m$ estão bem menores que para o modelo $[M/M/1]^m$, ainda que sejam grandes.

Após admitir como satisfeitas todas as suposições para a aplicação do modelo com trocas, deve-se investigar se este é capaz de estimar satisfatoriamente o tempo médio de espera na fila, observado na amostra. O modelo foi implementado em linguagem Pascal, os sistemas lineares envolvidos foram resolvidos por meio do método de Gauss-Jordan e chegaram a ter milhares de equações. Por exemplo, o modelo com $m=8$, $k=2$ e $N=3$ envolveu 12866 equações, cuja geração e resolução consumiram mais de 1 hora num computador padrão. Por outro lado, sistemas com cerca de 6000 equações foram resolvidos em poucos minutos, e sistemas com 1000 equações consumiram apenas alguns segundos para serem resolvidos. Sobre a capacidade de aplicação do modelo com trocas, observa-se que para sistemas com maiores números de filas, os números de equações crescem bastante e, dependendo também dos valores assumidos para k e N , envolvem dificuldades

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

computacionais para serem resolvidos na implementação aqui realizada, em função da grande demanda de memória de computador.

Nas Tabelas 4 e 5 apresentam-se as comparações entre os modelos apresentados e aplicados. Foram destacados, em negrito, em todas as situações e para todos os modelos comparados, os desvios obtidos que tiveram valor menor ou igual a 10%.

Tabela 4: Comparação entre os modelos $M / M / m$ e $[M / M / 1]^m$, e os resultados obtidos pelo modelo com trocas.

Dia	Tipo	$M / M / m$ W_q desvio	$[M / M / 1]^m$ W_q desvio	Modelo com trocas W_q desvio	Tempo de espera (min)
03	N	1,8159 0,9%	22,18 1232,3%	1,7790 -1,2%	1,80
	R	0,6957 48,7%	4,2824 299,5%	1,2600 -11,9%	1,43
04	N	3,4397 2,4%	37,7379 1123,2%	3,2440 -3,5%	3,36
	R	2,5594 40,6%	11,8973 653,7%	2,1615 18,8%	1,82
05	N	2,2640 22,4%	26,1374 1412,8%	2,1855 18,1%	1,85
	R	1,6086 0,1%	8,1291 504,9%	1,5259 -5,2%	1,61
10	N	1,4744 6,1%	19,7924 1423,9%	1,4622 5,2%	1,39
	R	0,6076 -51,0%	3,9173 315,9%	1,1830 -4,6%	1,24
11	N	3,6885 1,6%	39,7087 1093,9%	3,4363 -5,3%	3,63
	R	3,0074 37,3%	13,7033 625,7%	2,4036 9,8%	2,19
12	N	3,5288 20,8%	36,9499 1265,4%	3,2128 10,0%	2,92
	R	2,8757 8,9%	13,2810 503,1%	2,8842 9,3%	2,64

Nota-se que o modelo com trocas tem, de modo geral, melhores estimativas que os demais modelos. Ainda que em seis (das doze) situações seu comportamento não tenha sido melhor do que os demais, em duas delas os desvios foram de apenas -1,2% e -3,5%, podendo ser considerados quase que equivalentes aos desvios da $M/M/m$, respectivamente de 0,9% e de 2,4%, relativos aos caixas normais dos dias 3 e 4 de dezembro. É notório o impacto que as trocas de filas surtem nas estimativas quando se consideram as filas paralelas independentes,

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

como no caso do modelo de fila $[M/M/1]^m$. Os desvios obtidos denotam o quanto pode ser prejudicial às análises dos sistemas desconsiderarem a dependência, quando esta existe.

Tabela 5: Comparação entre os modelos $M/M/m/mN$ e $[M/M/1/N]^m$, e os resultados obtidos pelo modelo com trocas (aqui repetidos da Tabela 4 por conveniência).

Dia	Tipo	$M/M/m/mN$ W_q desvio	$[M/M/1/N]^m$ W_q desvio	Modelo com trocas W_q desvio	Tempo de espera (min)
03	N	1,57 -12,8%	6,95 286%	1,7790 -1,2%	1,80
	R	0,69 -51,7%	2,92 104%	1,2600 -11,9%	1,43
04	N	3,27 -2,7%	9,24 175%	3,2440 -3,5%	3,36
	R	2,32 27,5%	4,44 144%	2,1615 18,8%	1,82
05	N	2,17 17,3%	7,26 292%	2,1855 18,1%	1,85
	R	1,51 -6,2%	3,69 129%	1,5259 -5,2%	1,61
10	N	1,46 5,0%	7,29 524,5%	1,4622 5,2%	1,39
	R	0,61 -50,8%	2,82 127,4%	1,1830 -4,6%	1,24
11	N	3,40 -6,3%	9,22 154,0%	3,4363 -5,3%	3,63
	R	2,62 19,6%	3,86 76,2%	2,4036 9,8%	2,19
12	N	3,17 8,6%	7,87 169,5%	3,2128 10,0%	2,92
	R	2,58 -2,3%	4,07 54,2%	2,8842 9,3%	2,64

Também, pode parecer, em análise inicial, que os modelos $M/M/m$ e $M/M/m/mN$ são concorrentes ao modelo com trocas. Deve lembrar-se que, de fato, o modelo $M/M/m$ pode ser visto como o caso particular do modelo com trocas com $k=1$ e $N \rightarrow \infty$. Como as possibilidades de perda do modelo com trocas com $k=1$ e $N=5$ (para caixas normais) e com $k=1$ e $N=7$ (para caixas rápidos) são pequenas, esperam-se resultados similares aos obtidos pelo modelo com trocas.

Para melhor comparação entre os modelos, foi realizado o cálculo das médias dos valores absolutos dos seus respectivos desvios. Assim, ao realizar-se um cálculo simples, observa-se que esta média para o modelo $M/M/m$ é 19,6% (valor próximo ao obtido para o

modelo $M/M/m/mN$, de 18,1%), sendo que para o modelo com trocas foi de 8,6%. Ainda, observou-se que o comportamento de k parece estar ligado ao tipo de caixa e provavelmente ao valor de $\lambda_E / m\mu$. No estudo em Morabito e Lima (2004), as médias dos valores absolutos destes desvios resultou em cerca de 8%, ou seja, muito próximas ao deste estudo.

Em geral, o modelo de filas com trocas mostrou-se mais preciso (com desvios menores) e mais consistente em suas medidas, ou seja, seu comportamento é mais harmônico que os outros modelos considerados. Para corroborar esta ideia foi calculado o erro médio quadrático (EMQ) para cada um dos modelos de filas analisados (vide Tabela 6). Observa-se que os menores valores para esta medida foram obtidos para o modelo com trocas, tanto para os caixas normais quanto para os caixas rápidos. Este fato revela que há maior consistência nas estimativas fornecidas por este modelo. Desta maneira, observa-se que o modelo com trocas pode ser uma boa opção para analisar sistemas de filas em caixas de supermercados.

Tabela 6: Comparação entre os erros médios quadráticos para os modelos de filas analisados.

Tipo	M/M/m/mN	$[M/M/1]^m$	M/M/m/mN	$[M/M/1/N]^m$	Modelo com trocas
N	0,30	28,83	0,22	5,60	0,21
R	0,61	8,22	0,48	1,86	0,21

6. Conclusões

O presente trabalho foi elaborado utilizando-se dados obtidos com a colaboração de um supermercado do interior paulista. Os resultados aqui obtidos revelaram que o modelo analítico de filas com trocas tem boa previsibilidade em representar situações reais, contudo, por se tratar de um estudo de caso, não se deve inferir para situações muito gerais sem prévia investigação da similaridade de condições que qualquer outro estabelecimento tenha. Foram também estudados alguns sistemas de filas bem conhecidos da literatura e que poderiam ser utilizados para aproximar o sistema de filas comumente encontrado em supermercados, tais como os sistemas $M/M/m$, $M/M/m/mN$, $[M/M/1]^m$ e $[M/M/1/N]^m$. O que se pode observar é que os modelos de filas paralelas e independentes em geral superestimaram os tempos de espera na fila, enquanto os outros modelos com fila única têm muita variabilidade em suas estimativas.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

No estudo em Morabito e Lima (2004), o modelo de filas com trocas foi aplicado num experimento com menor número de caixas do que no presente estudo e assim, estimativas piores seriam esperadas no presente experimento. Isto porque em casos com maior número de caixas, os clientes dificilmente fariam trocas entre duas filas muito distantes entre si, até pela dificuldade na visualização das oportunidades que se apresentam nas filas distantes no decorrer das suas esperas. Contudo, resultados similares foram obtidos nos dois estudos, no que diz respeito ao nível de desvio dos valores estimados do modelo com trocas e dos valores reais observados. Um fato interessante que pode explicar em parte esta observação é que parece ocorrer uma auto-regulação do sistema. Apesar de no sistema real as trocas ocorrerem principalmente para filas adjacentes e no modelo analítico para quaisquer filas de menor tamanho, isto não deteriora de forma importante os resultados obtidos, dado que conforme as trocas vão sendo realizadas, novas oportunidades de trocas surgem nas filas adjacentes, causando o que se poderia denominar como um efeito “onda”, fazendo com que não hajam grandes diferenças de tamanhos entre as filas. Logo, o comportamento do modelo com trocas tende a ficar próximo do funcionamento do sistema real, não deteriorando suas estimativas.

Conforme explorado neste estudo, devido a se conhecer a distribuição de equilíbrio dos estados do sistema para o modelo de filas com trocas, várias medidas de desempenho podem ser calculadas, mas o tempo médio de espera na fila é a mais importante para este estudo. De forma geral, para o supermercado analisado e nos dias de coleta realizados, pode-se dizer que as trocas de filas consideradas no modelo analítico tendem a melhorar seu desempenho em estimar o tempo médio de espera dos clientes. Também, deixam as estimativas mais consistentes, ou seja, com menor variabilidade que os outros modelos aqui analisados. Este fato é importante para avaliar e propor melhorias em sistemas de filas comumente encontrados em supermercados.

Uma pesquisa futura interessante seria estudar em que condições os sistemas de filas com trocas poderiam ser generalizados. Uma questão interessante seria verificar se blocos de sistemas de filas menores poderiam representar satisfatoriamente sistemas maiores. Como exemplos, investigar se um sistema de filas com dezesseis canais, difícil de ser resolvido da forma anteriormente citada em função do seu porte, poderia ser representado de forma aceitável por dois blocos independentes de oito canais cada um, ou quatro blocos de quatro canais cada um. Também, provavelmente, quanto maiores os blocos que representam sistemas ainda maiores, menor a perda de informações e o vício que isto trará. Portanto, estes estudos poderiam levar à extensão do modelo de filas com trocas, com mais canais e com uma

avaliação qualitativa das condições em que esta aproximação seria obtida com níveis aceitáveis. Outra pesquisa futura interessante seria investigar melhor a sensibilidade do modelo de filas com trocas a possíveis variações nos seus parâmetros e também explorar o projeto ótimo e a análise de curvas de *tradeoff* entre diferentes medidas de desempenho do sistema de caixas de supermercados, a exemplo do que foi feito em Tang e Yoo (1991) e Fontanella e Morabito (2002) em outros sistemas de filas. Desta forma, poder-se-ia estudar melhor o *tradeoff* entre o nível de serviço, por exemplo, o tempo médio de espera em fila dos clientes, e a capacidade do sistema, como o número de caixas abertos em certos períodos de operação.

Agradecimentos

Os autores agradecem aos dois revisores anônimos pelos úteis comentários e sugestões de revisão, e à empresa pela colaboração com esta pesquisa.

Referências

- Arenales, M.; Armentano, V.; Morabito, R.; Yanasse, H. (2015). Pesquisa operacional. 2ª ed. Rio de Janeiro: Elsevier.
- Bartholomew, D. J.; Steele, F.; Moustaki, I.; Galbraith, J. I. (2002). The analysis and interpretation of multivariate data for social scientists. Florida: Chapman & Hall/CRC.
- Bolfarine, H.; Bussab, W. O. (2005). Elementos de amostragem. São Paulo: Blücher.
- Cogan, S. (1998). Gerenciando as percepções nas filas de espera: para aumentar o nível de satisfação dos clientes. Rio de Janeiro: Qualitymark.
- Conover, W. J. (1999). Practical nonparametric statistics. 3ª ed. New York: John Wiley.
- Ferrari, S. C. (2002). Filas paralelas com servidores heterogêneos e jockeying probabilístico. 2002. 76f. Dissertação (Mestrado em Ciências de Computação e Matemática Computacional) - ICMC, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP.
- Fontanella, G. C.; Morabito, R. (2002). Analyzing the tradeoff between investing in service channels and satisfying the targeted user service for Brazilian internet service providers. *International Transactions in Operational Research*, v. 9, n. 3, p. 247-260.
- Gross, D.; Harris, C. M. (1974). Fundamentals of queueing theory. New York: John Wiley & Sons.
- Hassim, R.; Havin, M. (2003). To queue or not to queue. Massachusetts: Kluwer Academic Publishers.
- Ibe, O. (2009). Markov processes for stochastic modeling. San Diego: Elsevier Academic Press.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Ittig, P. T. (1993). Planning service capacity when demand is sensitive to delay. *Decision Sciences*, v. 25, n. 4, p. 541-559.

Kleinrock, L. (1975). *Queueing systems*. New York: John Wiley & Sons.

Kobayashi, M.; Sakuma, Y.; Miyazawa, M. (2013). Join the shortest queue among k parallel queues: tail asymptotics of its stationary distribution. *Queueing Systems*, v. 74, n. 2-3, p. 303-332.

Koenigsberg, E. (1966). On jockeying in queues. *Management Science*, v. 12, n. 5, p. 412-436.

Larson, R. C. (1987). Perspectives on queues: social justice and the psychology of queueing. *Operations Research*, v. 35, n. 6, p. 895-905.

Li, L.; Jiang, L.; Liu, L. (2012). Service and price competition when customers are naive. *Production and Operations Management*, v. 21, n. 4, p. 747-760.

Mitrani, I. (1998). *Probabilistic modeling*. Cambridge: University Press.

Morabito, R.; Lima, F. C. R. (2000). Um modelo para analisar o problema de filas em caixas de supermercados: um estudo de caso. *Pesquisa Operacional*, v. 20, n. 1, p. 59-71.

Morabito, R.; Lima, F. C. R. (2004). A markovian queueing model for the analysis of user waiting times in supermarket checkouts. *International Journal of Operations and Quantitative Management*, v. 10, n. 2, p. 165-177.

Rinaldi, J. G. S. (2007). A importância da rapidez de atendimento nos caixas de supermercados: um estudo de caso utilizando um modelo analítico de filas com trocas. 2007. 175f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP.

Rinaldi, J. G. S.; Morabito, R.; Tachibana, V. M. (2009). A importância da rapidez de atendimento em supermercados: um estudo de caso. *Gestão & Produção*, v. 16, n. 1, p. 1-14.

Rothkopf, M. H.; Rech, P. (1987). Perspectives on queues: combining queues is not always beneficial. *Operations Research*, v. 35, n. 6, p. 906-909.

Sakuma, Y. (2010). Asymptotic behavior for MAP/PH/c queue with shortest queue discipline and jockeying. *Operations Research Letters*, v. 38, n. 1, p. 7-10.

Tang, C. S.; Yoo, S. (1991). System planning and configuration problems for optimal system design. *European Journal of Operational Research*, v. 54, p. 163-175.

Tarabia, A. M. K. (2008). Analysis of two queues in parallel with jockeying and restricted capacities. *Applied Mathematical Modelling*, v. 32, n. 5, p. 802-810.

Umesh, U. N.; Pettit, K. L.; Bozman, C. S. (1989). Shopping model of the time-sensitive. *Decision Sciences*, v. 20, n. 4, p. 715-729.

Van Dijk, N. M. (1997). Why queueing never vanishes. *European Journal of Operational Research*, v. 99, n. 2, p. 463-476.

Wolff, R. W. (1989). *Stochastic modeling and the theory of queues*. New Jersey: Prentice Hall.

Xie, J.; He, Q.-M.; Zhao, X. (2009). On the stationary distribution of queue lengths in a multi-class priority queueing system with customer transfers. *Queueing System*, v. 62, n. 3, p. 255–277.

ANEXOS

(i) Modelo $M/M/m$ com fila única. Tempo médio de espera na fila: $W_q = \frac{(\lambda/\mu)^m p_0}{\mu m(1-\rho)^2 m!}$, onde

$\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$ é o fator de utilização, e $p_0 = \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(\lambda/\mu)^i}{i!} + \frac{(\lambda/\mu)^m}{(1-\rho)m!} \right\}^{-1}$ é a probabilidade do sistema vazio.

(ii) Modelo $M/M/m/mN$ com fila única. Tempo médio de espera na fila: $W_q = \frac{\lambda/m}{\mu(\mu - \lambda/m)}$,

onde $L_q = \frac{p_0(m\rho)^m}{m!(1-\rho)^2} [1 - \rho^{mN-m+1} - (1-\rho)(mN-m+1)\rho^{mN-m}]$ é o número médio de clientes na fila,

$p_{mN} = \frac{1}{m^{mN} m!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{mN} p_0$ é a probabilidade de perda, e

$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \frac{(\lambda/\mu)^m}{m!} \frac{1 - (\lambda/m\mu)^{mN-m+1}}{1 - (\lambda/m\mu)} \right]^{-1}$ é a probabilidade do sistema vazio.

(iii) Modelo com m filas $M/M/1/N$ ($[M/M/1/N]^m$). Tempo médio de espera na fila: $W_q =$

$W - 1/\mu$, onde $W = L/\lambda_E$ é o tempo médio de espera no sistema,

$L = \frac{\rho[1 - (N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}]}{(1-\rho^{N+1})(1-\rho)}$ é o número médio de clientes no sistema, $\lambda_E = \lambda(1-p_N)$ é a

taxa de entrada no sistema, $\rho = \lambda/\mu$ é o fator de utilização, $p_N = \frac{(1-\rho)\rho^N}{1-\rho^{N+1}}$ é a

probabilidade de perda, e $p_0 = (1-\rho)/(1-\rho^{N+1})$ é a probabilidade do sistema vazio.