

HEDGE ÓTIMO DE CARTEIRAS DE OPÇÕES NO BRASIL

Antonio Marcos Duarte Júnior
IBMEC-RJ

Resumo

Consideramos o problema de hedgear o risco de mercado de carteiras de opções. Existem várias alternativas para este problema. Três possibilidades são: estratégias de limite máximo de perda, posições cobertas (*covered positions*) e estratégias de hedge dinâmico (incluindo hedge delta, hedge delta-gama, hedge delta-gama-vega, etc.). Neste trabalho propomos uma estratégia dinâmica que obtém o hedge de mínima variância usando programação mista. Usaremos como nosso caso ilustrativo o problema de hedgear opções exóticas vendidas por uma instituição financeira brasileira. Devido principalmente à alta volatilidade dos mercados de ações e renda-fixa locais, abordagens simples para o hedge (como hedge delta) não são suficientes no mercado brasileiro. Mais ainda, dado que existe um número reduzido de opções com liquidez no mercado local, as estratégias de hedge disponíveis para operadores e gerentes de risco brasileiros são muito limitadas. Comentamos sobre estas e outras dificuldades quando hedgeando carteiras de opções no Brasil.

Palavras-chave: derivativos; gerenciamento de risco; hedge; opções.

Abstract

We consider the problem of hedging the market risk of options portfolios. There are several alternatives to this problem. Three possibilities are: stop-loss strategies, covered positions and dynamic hedging strategies (including delta hedging, delta-gamma hedging, delta-gamma-vega hedging, etc.). In this work we propose a dynamic hedging strategy that obtains the minimum-variance hedge using mixed-integer programming. We use as our case study the problem of hedging exotic stock options sold by a Brazilian financial institution. Mainly due to the huge volatility of the Brazilian stock and fixed-income markets, simple hedging approaches (such as delta hedging) are not recommended in the local market. Moreover, since there is a small number of liquid exchange-traded options, the hedging strategies available for Brazilian traders and risk managers are very limited. We comment on these as well as other operational difficulties when hedging options portfolios in Brazil.

Keywords: derivatives; risk management; hedge; options.

1. Introdução

O desenvolvimento da área de produtos derivativos (Hull (1997)) sofisticados requer, necessariamente, um bom controle de risco (Duarte (1996)). Qualquer instituição agindo como originador, *market-maker* ou corretora deve ser capaz de prevenir perdas potenciais em suas posições de derivativos (Hull & White (1987)). Uma abordagem possível para o gerenciamento da exposição de uma instituição a produtos derivativos sofisticados é hedgear o risco de mercado de sua carteira. Hedge pode ser definido como um conjunto de medidas protetoras, implementadas de forma a minimizar (ou controlar dentro de níveis aceitáveis) as perdas potenciais devido a flutuações não antecipadas do mercado. Existem várias possibilidades para o hedge de produtos derivativos sofisticados. Algumas destas possibilidades incluem estratégias de limite máximo de perda, posições cobertas (*covered positions*) e estratégias dinâmicas (como hedge delta, hedge delta-gama, hedge delta-gama-vega, etc.; veja Hull (1997)).

Hedgear produtos derivativos sofisticados não é uma tarefa simples (Galai (1983)). Por exemplo, suponhamos que uma instituição financeira tenha vendido opções exóticas em um índice de ações local (como o Índice Geral da Bolsa de Valores de São Paulo, o IBOVESPA). Nesta situação, a sensibilidade da opção ao ativo objeto muda continuamente ao longo do tempo (Boyle & Emanuel (1980)). Mais ainda, o valor da opção é sensível a fatores como a volatilidade do ativo objeto e a estrutura a termo das taxas de juros brasileiros. Estes dois últimos fatores não podem ser hedgeados usando somente o ativo objeto (como carteiras indexadas ao IBOVESPA; veja Duarte (1997)). Outras opções são necessárias para o hedge neste caso. Mais ainda, dado que a exposição a fatores de risco como volatilidade e juros varia continuamente, é necessário rebalanceá-lo com frequência. Como vemos, estratégias de hedge dinâmico exercem um papel crucial quando gerenciando o risco de produtos derivativos sofisticados.

Técnicas de otimização são fundamentais quando derivativos são hedgeados dinamicamente. Propomos neste trabalho um modelo de otimização que obtem o hedge de mínima variância para uma carteira de opções. Como ilustração nos concentramos no caso de opções exóticas vendidas por uma instituição brasileira a seus clientes.

Em termo de sua organização, consideramos na próxima seção alguns aspectos práticos importantes relacionados ao mercado de opções no Brasil. Seguem então três seções técnicas onde os aspectos computacionais e de modelagem matemática do problema são discutidos. Um exemplo é fornecido como ilustração numérica do uso da metodologia.

2. Características do Mercado Brasileiro de Opções

Três bolsas oferecem opções no Brasil: a Bolsa de Mercadoria & Futuros, a Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA) e a Bolsa de Valores do Rio de Janeiro (BVRJ). Neste trabalho nos concentramos no mercado acionário brasileiro. Opções de compra e venda em ações brasileiras e índices (IBOVESPA) podem ser encontradas na BOVESPA e na BVRJ. Nestas duas bolsas somente as opções de compra próximas-do-dinheiro (*near-the-money*) e próximas-a-expirar (*next-to-expire*) em algumas ações (como VALE-PN e TELEBRÁS-PN) são líquidas suficiente para uso como instrumento de hedge.

Gráfico 1 – Volatilidade do Mercado Acionário Brasileiro e Norte-Americano

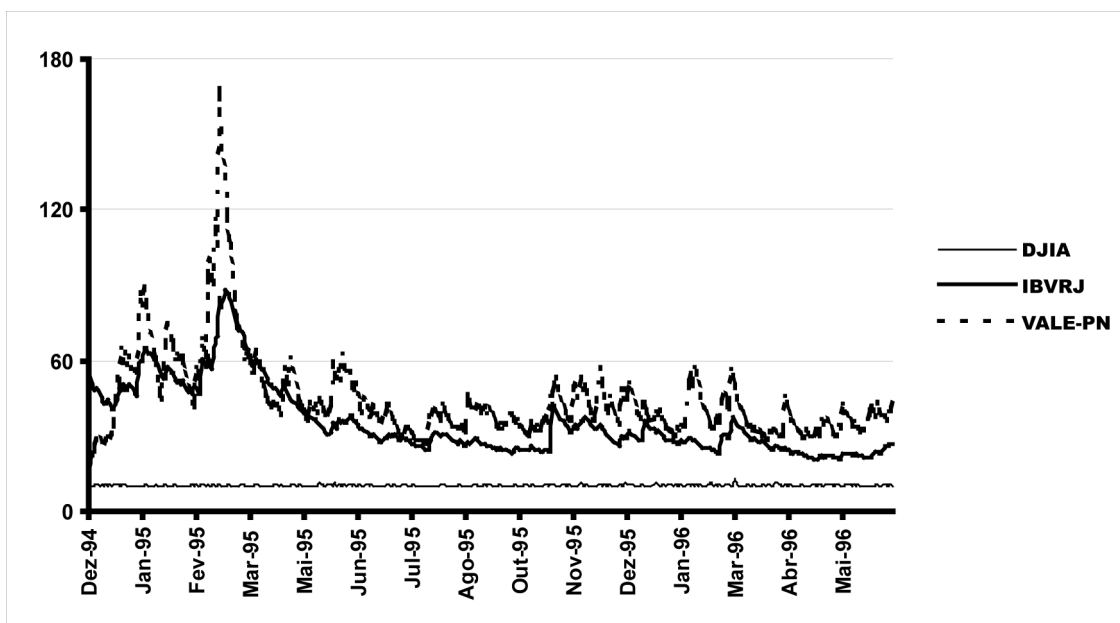
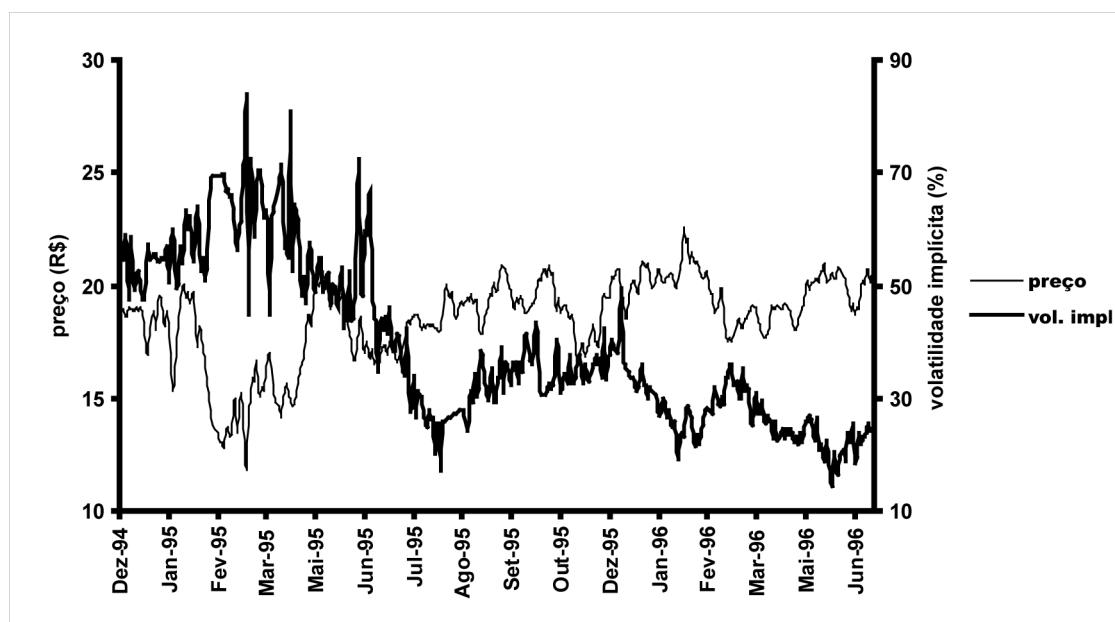


Gráfico 2 – Volatilidade Implícita de Opções de Compra em VALE-PN



Duas são as razões fundamentais que tornam o uso de técnicas simples de hedge (como hedge delta) insuficientes quando gerenciando o risco de carteiras de opções no Brasil:

- 1) O anexo de Janeiro de 1996 ao Acordo sobre Capital da Basiléia (*Basle Capital Accord*) por parte do Comitê da Basiléia para Supervisão Bancária (*Basle Committee on Banking Supervision*) requer que qualquer instituição originadora de produtos derivativos sofisticados meça e controle pelo menos seus riscos delta, gama e vega (Hull (1997)).
- 2) O hedge dos fatores gama, vega e ρ de carteiras de opções é uma necessidade em ambientes extremamente voláteis, como o Brasil. Mais ainda, as características das opções existentes na BOVESPA e BVRJ são tais que ignorar o gama e o vega de carteiras com estas opções pode ser uma fonte de perdas substanciais.

Três características importantes do mercado brasileiro são:

- 1) O mercado acionário brasileiro possui uma volatilidade bem maior que aquela de mercados europeus e norte-americano, onde técnicas simples de hedge são apropriadas. Por exemplo, no Gráfico 1 temos a volatilidade GARCH do *Dow Jones Industrial Average* (DJIA), do Índice da Bolsa de Valores do Rio de Janeiro (IBVRJ) e de uma ação (VALE-PN). Para os dezoito meses considerados neste gráfico, o valor médio da volatilidade do IBVRJ foi aproximadamente cinco vezes maior que o do DJIA.
- 2) O que ilustramos no caso do mercado acionário brasileiro é também válido quando comparamos o mercado de juros local com os mercados europeus e norte-americanos. Por exemplo, o valor médio da volatilidade GARCH das taxas de juros de um mês dos CDBs brasileiros foi (para os mesmos dezoito meses do Gráfico 1) aproximadamente oito vezes maior que a volatilidade GARCH obtida para a US\$-LIBOR de um mês.
- 3) Finalmente, mostramos no Gráfico 2 dados para a volatilidade implícita de opções de VALE-PN negociadas na BVRJ. Notamos que esta volatilidade implícita variou aproximadamente entre 15% e 90% para o período mostrado. Se calcularmos o valor médio para a volatilidade GARCH desta volatilidade implícita (para o mesmo período) obteremos aproximadamente 26%, o que é substancialmente maior que seu equivalente no caso de opções sobre ações norte-americanas. Esta observação ilustra a importância do risco vega no Brasil.

Ignorar riscos como aqueles relacionados com o gama, vega e ρ de uma carteira de opções pode ser altamente enganoso no mercado brasileiro de opções.

Além das três observações acima, duas outras características do mercado local tornam o problema da análise do risco de uma carteira de opções no mercado brasileiro ainda mais delicado se não considerarmos os riscos gama e vega:

- 1) O Gráfico 3 ilustra como o gama de uma opção de compra européia simples (com preço de exercício igual a 50, volatilidade igual a 25% e taxa de juros de 15%) varia com seu prazo para vencimento e com o preço do ativo objeto. Vemos que o gama é maior exatamente para as opções próximas-a-expirar e próximas-do-dinheiro. Conforme já colocado anteriormente, estas são as opções mais líquidas na BOVESPA e BVRJ e, portanto, as mais apropriadas para hedge dinâmico.

Gráfico 3 – Gama de uma Opção para Diferentes Preços e Tempo para o Vencimento

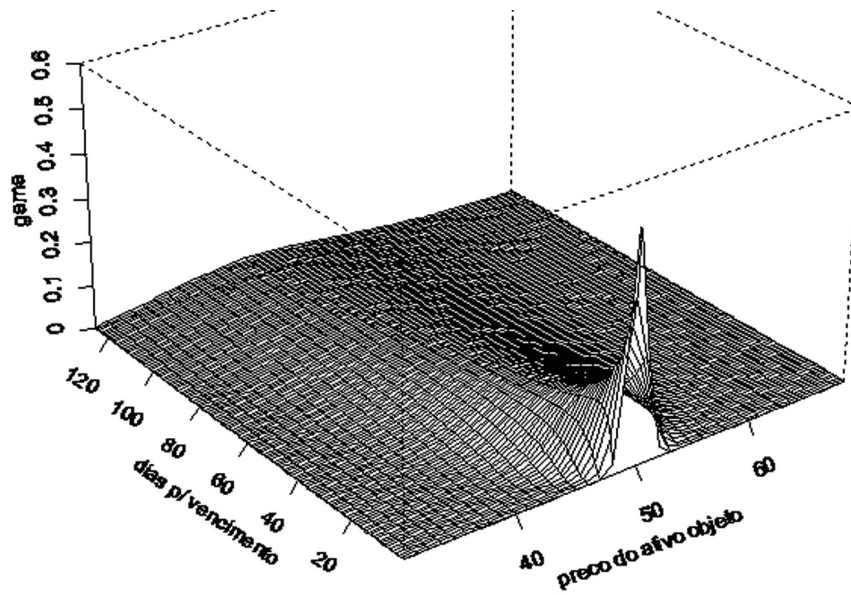
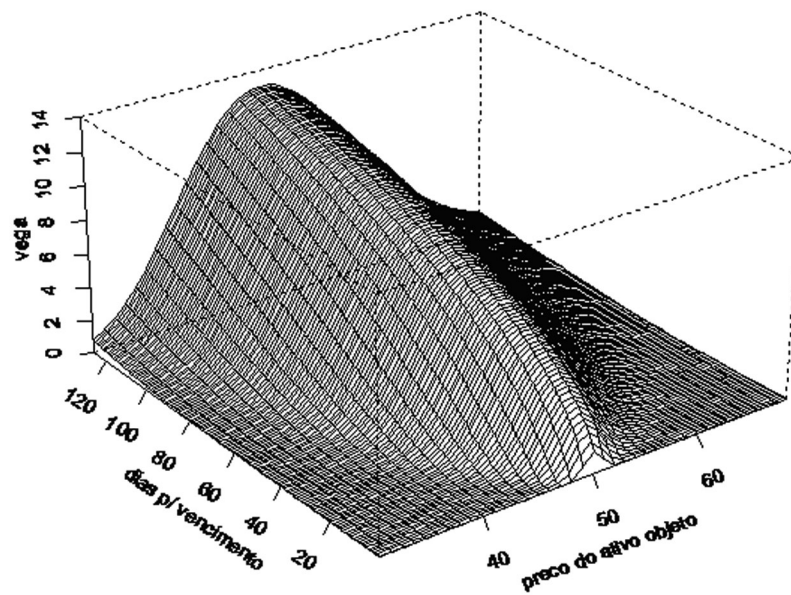


Gráfico 4 – Vega de uma Opção para Diferentes Preços e Tempo para Vencimento



- 2) Gráfico 4 é o equivalente do Gráfico 3 para o vega. Ao contrário do que acontece com o gama, o vega diminui com a maior proximidade do vencimento, muito embora seja máximo para opções próximas-do-dinheiro.

De nossa experiência diária no cálculo do risco de mercado de carteiras de opções no Brasil, consideramos o risco delta como fundamental para o hedge. A seguir, surgem os riscos gama e vega como igualmente importantes, seguidos a certa distância pelo risco ρ . Para maiores detalhes veja Duarte & Maia (1997).

Pelos motivos expostos acima, sugerimos fortemente que pelo menos três riscos sejam sempre considerados quando hedgeando uma carteira de opções no Brasil: delta, gama e vega. Por motivo de completitude também incluiremos em nossa análise o risco ρ .

Operadores de opções no mercado local têm que considerar mais uma dificuldade ainda: a falta de liquidez de opções fora-do-dinheiro (*out-of-the-money*) e a alta volatilidade do mercado acionário podem causar sérios problemas no rebalanceamento do hedge. Por exemplo, uma opção de compra próxima-do-dinheiro pode ser usada inicialmente para hedge. O preço do ativo objeto pode então cair acentuadamente em um dia, deixando a opção fora-do-dinheiro. O mercado passa a negociar então uma outra opção que agora se encontra próxima-do-dinheiro, reduzindo substancialmente a liquidez da opção inicialmente usada para hedge. Reduzir a posição na opção usada inicialmente pode ser agora uma tarefa difícil. Uma segunda opção terá que ser combinada àquela inicialmente usada de forma a reduzir o risco da carteira como um todo. Infelizmente, modelar matematicamente este problema de falta de liquidez é tarefa extremamente difícil. Nossa sugestão é sempre agir de forma prudente, de forma a evitar situações onde o operador fica com instrumentos ilíquidos na carteira.

3. Motivação para o Hedge de Mínima Variância

Neste trabalho adaptamos para carteiras de opções as idéias básicas do Hedge de Mínima Variância (HMV) propostas originalmente em Jonhson (1960) para futuros. O uso do HMV é muito conveniente para carteiras de opções uma vez que:

- 1) Esta metodologia de hedge “pondera a importância relativa” dos quatro riscos considerados (delta, gama, vega e ρ) de forma a atingir o hedge ótimo, o que é fundamental quando o número de instrumentos para hedge são poucos. Mais ainda, esta metodologia permite explorar de forma ótima a estrutura de covariância entre estes quatro riscos, conforme ilustrado adiante.
- 2) Quando obtendo o hedge de mínima variância, o *Value-at-Risk* da carteira (Duarte (1996)) já estará sendo minimizado. Usar uma metodologia que seja consistente com o controle de risco da instituição é importante pois reduz as chances de violação dos limites máximos de risco por área impostos pelo comitê de risco.

Dadas as características do mercado brasileiro de opções analisadas até aqui, o objetivo de qualquer operador ou gerente de risco interessado em hedgear uma carteira de opções exóticas deve ser o de minimizar conjuntamente todos os riscos analisados acima. Usaremos o HMV para este fim.

4. Variância de uma Carteira de Opções

O preço de uma opção em ações depende do preço do ativo objeto (S), da volatilidade do ativo objeto (σ), do preço de exercício (K), da taxa de juros (r) e do tempo para vencimento (T). Se denotarmos o valor da opção por $V(S, K, \sigma, r, T)$, para pequenas variações no preço do ativo objeto, na volatilidade, na taxa de juros e no tempo para vencimento, obteremos que

$$dV \approx \delta (dS) + \frac{\gamma}{2} (dS)^2 + \kappa (d\sigma) + \rho (dr) + \theta (dT), \quad (1)$$

onde $\delta, \gamma, \kappa, \rho, \theta$ são as “gregas” (Hull (1997)) da opção. Se definirmos

$$R_S \equiv \frac{dS}{S}, \quad R_\sigma \equiv \frac{d\sigma}{\sigma}, \quad R_r \equiv \frac{dr}{r}, \quad (2)$$

podemos escrever (1) como

$$dV \approx \delta S R_S + \frac{\gamma S^2}{2} R_S^2 + \kappa \sigma R_\sigma + \rho r R_r + \theta dT, \quad (3)$$

onde assumimos que R_S é uma variável aleatória com quarto momento finito (ou seja, $E(R_S^4) < \infty$), e R_σ e R_r são variáveis aleatórias com segundo momento finito (ou seja, $E(R_\sigma^2) < \infty, E(R_r^2) < \infty$).

Uma aproximação para a variância de dV para um intervalo de tempo conhecido é

$$\text{Var}(dV) \approx \text{Var} \left(\delta S R_S + \frac{\gamma S^2}{2} R_S^2 + \kappa \sigma R_\sigma + \rho r R_r \right), \quad (4)$$

que quando expandida resulta em

$$\begin{aligned} \text{Var}(dV) \approx & \delta^2 S^2 \text{Var}(R_S) + \frac{\gamma^2 S^4}{4} \text{Var}(R_S^2) + \kappa^2 \sigma^2 \text{Var}(R_\sigma) + \rho^2 r^2 \text{Var}(R_r) + \\ & 2\delta\gamma S^3 \text{Cov}(R_S, R_S^2) + 2\delta\kappa S\sigma \text{Cov}(R_S, R_\sigma) + 2\delta\rho S r \text{Cov}(R_S, R_r) + \\ & \gamma\kappa S^2\sigma \text{Cov}(R_S^2, R_\sigma) + \gamma\rho S^2 r \text{Cov}(R_S^2, R_r) + 2\kappa\rho\sigma \text{Cov}(R_\sigma, R_r). \end{aligned} \quad (5)$$

Vemos que $\text{Var}(dV)$ é aproximadamente uma função quadrática dos riscos delta, gama, vega e rô, o que será explorado adiante de forma a obter uma metodologia eficiente e confiável do ponto de vista computacional.

Suponhamos agora uma carteira com m opções, todas sobre o mesmo ativo objeto. Se denotarmos o valor desta carteira por Π , temos que

$$\Pi \equiv \sum_{i=1}^m n_i l_i V_i(S, K_i, \sigma, r, T) \quad (6)$$

onde l_i denota o tamanho do lote mínimo negociado da $i^{\text{ésima}}$ opção, e n_i denota o número destes lotes na carteira. (Se $n_i > 0$ o operador está “comprado” nesta opção; se $n_i < 0$ o operador está “vendido” nesta opção.)

Repetindo para a carteira Π a análise feita acima no caso de uma única opção, obtemos que

$$d\Pi \approx \sum_{i=1}^m n_i l_i \left(\delta_i S R_S + \frac{\gamma_i S^2}{2} R_S^2 + \kappa_i \sigma R_\sigma + \rho_i r R_r + \theta_i dT \right), \quad (7)$$

donde

$$\text{Var}(d\Pi) \approx \text{Var} \left(\delta_\Pi S R_S + \frac{\gamma_\Pi S^2}{2} R_S^2 + \kappa_\Pi \sigma R_\sigma + \rho_\Pi r R_r \right) \quad (8)$$

com

$$\delta_{\Pi} \equiv \sum_{i=1}^m n_i l_i \delta_i, \quad \gamma_{\Pi} \equiv \sum_{i=1}^m n_i l_i \gamma_i, \quad \kappa_{\Pi} \equiv \sum_{i=1}^m n_i l_i \kappa_i, \quad \rho_{\Pi} \equiv \sum_{i=1}^m n_i l_i \rho_i, \quad \theta_{\Pi} \equiv \sum_{i=1}^m n_i l_i \theta_i. \quad (9)$$

Duas são as hipóteses embutidas em (7)-(9):

- 1) Todas as opções possuem igual tempo para vencimento. Esta é uma hipótese razoável no mercado acionário brasileiro uma vez que somente as opções próximas-a-expirar são líquidas o suficiente para hedge.
- 2) Todas as opções possuem igual volatilidade implícita. Esta hipótese é feita por motivos operacionais (bancos de dados menores, acesso a bancos de dados e cálculos mais rápidos, matrizes de correlação menores, etc.).

5. Hedge de Mínima Variância de uma Carteira de Opções

Para uma carteira com opções exóticas temos que o equivalente de (7) é

$$dE \approx \delta_E S R_S + \frac{\gamma_E S^2}{2} R_S^2 + \kappa_E \sigma R_{\sigma} + \rho_E r R_r + \theta_E dT. \quad (10)$$

Suponhamos que uma única opção (sobre o mesmo ativo objeto das opções exóticas) será utilizada para hedge, onde

$$dV_1 \approx \delta_1 S R_S + \frac{\gamma_1 S^2}{2} R_S^2 + \kappa_1 \sigma R_{\sigma} + \rho_1 r R_r + \theta_1 dT. \quad (11)$$

Aproximações para as variâncias de dE e dV_1 podem ser obtidas usando-se (5). A teoria do HMV implica que a quantidade ótima a ser comprada/vendida da opção V_1 é

$$x_{otimo} \approx -\frac{Cov(dE, dV_1)}{Var(dV_1)} \quad (12)$$

onde $Cov(dE, dV_1)$ denota a covariância entre dE e dV_1 .

A formulação do problema que nos leva a obter (12) é muito limitada: por exemplo, esta não reconhece que somente múltiplos de lotes mínimos são utilizados para hedge. Pior ainda, esta não utiliza o ativo objeto para hedge, o que seria muito conveniente quando controlando o risco delta da carteira em questão. Consideramos a seguir uma formulação mais geral para o problema de HMV.

O modelo de otimização que propomos para hedge está baseado nos seguintes três princípios:

- 1) A variância da carteira deve ser minimizada.
- 2) A quantidade de ações (ativo objeto) e opções usadas para hedge deve ser um múltiplo do lote mínimo disponível para negociação. Ou seja, o número de ações e opções a serem compradas/vendidas devem ser modeladas matematicamente usando-se variáveis inteiras de forma a evitar o mercado fracionário.

- 3) O modelo deverá ser confiável e eficiente do ponto de vista computacional, para que seja mantido operacional durante o pregão.

A formulação do problema é

$$\begin{aligned}
 \text{Minimize } & \text{Var} \left(\delta_{\Pi} S R_S + \frac{\gamma_{\Pi} S^2}{2} R_S^2 + \kappa_{\Pi} \sigma R_{\sigma} + \rho_{\Pi} r R_r \right) \\
 \text{Sujeito a: } & \delta_E + l_u u + \sum_{i=1}^m l_i n_i \delta_i = \delta_{\Pi} \\
 & \gamma_E + \sum_{i=1}^m l_i n_i \gamma_i = \gamma_{\Pi} \\
 & \kappa_E + \sum_{i=1}^m l_i n_i \kappa_i = \kappa_{\Pi} \\
 & \rho_E + \sum_{i=1}^m l_i n_i \rho_i = \rho_{\Pi} \\
 & u \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad n_1, \dots, n_m \in \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \\
 & \delta_{\Pi}, \gamma_{\Pi}, \kappa_{\Pi}, \rho_{\Pi} \in \mathfrak{R},
 \end{aligned} \tag{13}$$

onde assume-se que m opções estejam disponíveis para hedge.

Iniciando nossa discussão pela função objetivo do modelo, vemos que esta busca minimizar a variância da carteira. Usando-se (5) podemos ver que esta é uma função quadrática nas variáveis δ_{Π} , γ_{Π} , κ_{Π} , ρ_{Π} . Isto permite que o hedge seja obtido de forma confiável e eficiente do ponto de vista computacional usando algum algoritmo para programação convexa mista.

Observamos em (13) dois tipos de variáveis:

- 1) Variáveis inteiras são utilizadas para modelar o número de lotes do ativo objeto e de opções a serem comprados/vendidos: enquanto (n_1, \dots, n_m) representam variáveis relacionadas às opções, (u) representa o ativo objeto.
- 2) Variáveis contínuas $(\delta_{\Pi}, \gamma_{\Pi}, \kappa_{\Pi}, \rho_{\Pi})$ são utilizadas para modelar as “gregas” da carteira.

Os seguintes parâmetros são usados no modelo:

- 1) As “gregas” da carteira de exóticas são denotadas por $\delta_E, \gamma_E, \kappa_E, e \rho_E$.
- 2) Os tamanhos dos lotes de opções e ativo objeto a serem comprados/vendidos para hedge são denotados por l_1, \dots, l_m, l_u .

Todas as restrições em (13) são lineares. Isto ajuda bastante do ponto de vista computacional já que a combinação de restrições não-lineares e variáveis inteiras resulta em um problema de otimização usualmente difícil de ser resolvido.

Finalmente, outras restrições também poderiam ser usadas na modelagem dada em (13). Por exemplo, poderíamos exigir que o hedge fosse “auto financiado”, que o teta da carteira fosse positivo, etc. Incluir estas restrições é relativamente simples, ilustrando que modificar a formulação (13) de forma a adequar a mesma aos interesses específicos de um usuário não é uma tarefa das mais difíceis.

6. Um Exemplo Numérico

Ilustramos nesta seção o uso do modelo acima no caso do hedge de uma carteira de opções exóticas vendidas por um banco brasileiro em 17/04/96. Assumimos que as seguintes opções exóticas foram vendidas:

- 1) Três milhões de opções asiáticas de compra nos preços de fechamento diários na BVRJ de VALE-PN. Neste caso, o valor de cada opção no vencimento (17/06/96) é dado por

$$\text{Max}\left(0, S_T - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T S_t\right), \quad (14)$$

onde T denota o número de dias de negociação de VALE-PN (na BVRJ) entre 17/04/96 e 17/06/96, e S_1, S_2, \dots, S_T denotam seus preços de fechamento (na BVRJ).

- 2) Dois milhões de opções *lookback* de compra nos preços de fechamento diários na BVRJ de VALE-PN. Neste caso, o valor de cada opção no vencimento (17/06/96) é dado por

$$\text{Max}(0, S_T - S_{Min}), \quad (15)$$

onde S_{Min} é o mínimo preço de fechamento atingido por VALE-PN (na BVRJ) entre 17/04/96 e 17/06/96, e S_T é conforme definido acima.

Em 03/05/96 desejamos rebalancear o hedge da carteira de exóticas usando ações de VALE-PN e opções em VALE-PN negociadas na BVRJ. Para este dia, as “gregas” da carteira exótica estão dadas na Tabela 1. Também em 03/05/96, cinco opções em VALE-PN estavam disponíveis para negociação na BVRJ. Mais informações sobre estas opções estão dadas na Tabela 2. Da Tabela 3 podemos observar que nem todas as cinco opções disponíveis em VALE-PN podem ser consideradas líquidas. A única opção na Tabela 3 apropriada para o hedge da carteira de exóticas é a CFM-JUN. Consequentemente, o hedge da carteira de exóticas deverá ser feito usando-se somente o ativo objeto (ações VALE-PN) e a opção CFM-JUN.

Usando (13) com $m = 1$, a matriz de covariância estimada para $(R_s, R_s^2, R_\sigma, R_r)$ com um ano de dados, e as informações nas Tabela 2 e Tabela 3, obteremos que o hedge ótimo requer comprar 243.500 ações de VALE-PN e 37.500 opções CFM-JUN. O *Value-at-Risk* da posição (por um dia, com nível de significância de 95%) após o hedge é de R\$69.050,57, o que é aproximadamente quatro vezes menor que o *Value-at-Risk* da posição antes do hedge, o qual era R\$272.615,19. Como uma ilustração da importância do uso de CFM-JUN para controlar os riscos gama, vega e rô, mencionamos que o *Value-at-Risk* da posição quando usando somente o hedge delta teria permanecido em R\$169.790,39, ou seja, mais de duas vezes aquele valor obtido com o uso conjunto da ação VALE-PN e da opção CFM-JUN.

Tabela 1 – Quatro “Gregas” da Carteira de Opções Exóticas

Delta (δ_E)	Gama (γ_E)	Vega (κ_E)	Rô (ρ_E)
-275.955	-5.050	-72.205	-43.448

Tabela 2 – Opções de Compra em VALE-PN na BVRJ no Fechamento de 02/05/96

Código da Opção	Delta (δ_i)	Gama (γ_i)	Vega (κ_i)	Rô (ρ_i)
CFM-JUN	0.4745	0.1696	2.5207	0.9413
CFL-JUN	0.3264	0.1728	2.2827	0.6630
CFN-JUN	0.7061	0.1346	2.1806	1.3426
CFP-JUN	0.6398	0.1589	1.6257	1.2428
CFQ-JUN	0.1739	0.1198	1.6257	0.3573

Tabela 3 – Volume Negociado em Opções de VALE-PN na BVRJ no Fechamento de 02/05/96

Código da Opção	Número de Negócios	Número de Opções	Volume Negociado
CFM-JUN	130	244,600	R\$192,525.00
CFL-JUN	20	109,400	R\$45,900.00
CFN-JUN	13	22,000	R\$36,460.00
CFP-JUN	2	25,000	R\$31,000.00
CFQ-JUN	12	40,625	R\$8,125.00

No que se refere à eficiência computacional do modelo de otimização proposto, mencionamos que este exemplo numérico foi resolvido em menos de dois segundos (tempo de CPU medido pelo relógio do sistema operacional UNIX) em uma estação de trabalho Silicon Graphics Indigo R4000. Usamos para este fim um algoritmo de ponto interior em combinação com a linguagem de programação matemática AMPL (Fourer, Gay & Kernighan (1993)) conforme descrito em Duarte (1993). É sempre importante lembrar que os procedimentos quantitativos implementados no mercado financeiro devem ser, necessariamente, eficientes e confiáveis do ponto de vista computacional.

7. Conclusão

Apresentamos um modelo de otimização para hedge ótimo de carteiras de opções. Este modelo considera simultaneamente os riscos delta, gama, vega e rô da carteira. Vimos que a metodologia é eficiente computacionalmente, confiável e fácil de implementar e manter operacional em um base diária. Com pequenas modificações, esta metodologia de hedge dinâmico permite que o hedge de mínima variância seja obtido não só para carteiras de opções exóticas, mas também para qualquer instrumento derivativo mais sofisticado. Um pequeno exemplo foi usado para ilustrar como o modelo se comporta quando usado na prática. Extensões para casos mais gerais foram apresentadas e discutidas. Variações para cobrir outros instrumentos e mercados podem ser facilmente obtidas.

Agradecimentos

O autor agradece o suporte computacional recebido da Professora Beatriz V. M. Mendes, Laboratório de Estatística, Departamento de Métodos Estatísticos, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

8. Referências Bibliográficas

Boyle, P.P., & Emanuel, D. (1980). Discretely Adjusted Options Hedges. *Journal of Financial Economics*, **8**, 259-282.

Duarte Jr., A.M. (1993). *A New Computational Approach for Primal-Dual Interior Point Algorithms*, Ph.D. Thesis, Program in Operations Research and Statistics, Princeton University, USA.

Duarte Jr, A.M. (1996). Risco: Definições, Tipos, Medição e Recomendações para seu Gerenciamento. *Resenha BM&F*, **114**, 25-33.

Duarte Jr., A.M. (1997). Indexing Stock Portfolios in Brazil: Tracking the IBOVESPA and the FGV100. *Emerging Markets Quarterly*, **1**, 20-26.

Duarte Jr., A.M., & Maia, M.L.A. (1997). Optimal Portfolios with Derivatives. *Derivatives Quarterly*, **4**, 53-62.

Fourer, R., Gay, D.M., & Kernighan, B.W. (1993). *AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming*, The Scientific Press, San Francisco.

Galai, D. (1983). The Components of the Return from Hedging Options Against Stocks. *Journal of Business*, **56**, 45-54.

Hull, J.C. (1997). *Options, Futures, and Other Derivatives*, Prentice Hall, Upper Saddle River.

Hull, J.C., & White, A. (1987). Hedging the Risks from Writing Foreign Currency Options. *Journal of International Money and Finance*, **6**, 131-152.

Johnson, L. (1960). The Theory of Hedging and Speculation in Commodity Futures. *Review of Economic Studies*, **27**, 139-151.

Republicado de Pesquisa Operacional, v.17, n.2, pp.151-163, 1997