

## UMA NOVA HEURÍSTICA PARA O PROBLEMA DE COBERTURA DE ARCOS APLICADO AOS SERVIÇOS DE SANEAMENTO<sup>1</sup>

Suvaria Acosta de Oliveira Pureza<sup>a\*</sup>, Elaine Corrêa Pereira<sup>a</sup>,  
Catia Maria dos Santos Machado<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Universidade Federal do Rio Grande - FURG, Rio Grande-RS, Brasil

### Resumo

Esse trabalho tem por objetivo, testar um novo algoritmo que utiliza resultados matemáticos da Teoria Espectral sobre o Problema de Cobertura de Arcos aplicado aos serviços de saneamento, mais especificamente na leitura de hidrômetros. A metodologia utilizada no desenvolvimento do trabalho foi dividida em três etapas. Na primeira etapa, foi realizada uma pesquisa de campo organizando os dados disponibilizados por uma empresa de saneamento. A segunda etapa foi caracterizada pela determinação das medianas e dos subsetores, a partir da determinação dos pontos em cada metade de trechos de quadra e nas interseções de ruas, cadastrados em um mapa georeferenciado. Finalmente, na terceira etapa, foram determinadas as rotas para cada subsetor. Foi desenvolvida uma ferramenta computacional que integra um algoritmo elaborado a partir de uma nova medida de centralidade, denominada de autovetor distância-peso ( $C_{ADP}$ ) na determinação das medianas, do algoritmo de designação Gillet e Johnson e do algoritmo genético na determinação das rotas de cada subsetor. O aplicativo se mostrou flexível e permitiu a elaboração de mapas e a visualização das rotas em cada subsetor. O estudo da teoria espectral combinada com estudos em otimização combinatória, torna-se uma ferramenta a mais no auxílio da tomada de decisão.

Palavras-chave: P-medianas, Algoritmo Genético, Leitura de Hidrômetros.

### Abstract

This paper aims to test a new algorithm that uses mathematical results from the Spectral Theory concerning the Arc Cover Problem applied to sanitation services, specifically in reading water meters. The methodology used to develop the research was divided into three stages. In the first stage, field research was conducted organizing the data made available by a sanitation company. The second stage was characterized by determining the median and sub-sectors, based on determining points at each half of a block and street intersections, registered in a georeferenced map. Finally, in the third step, the routes for each subsector were established. A computational tool was developed that includes an algorithm developed from a new measure of centrality, called distance-weight eigenvector ( $CADP$ ) to determine the medians, from the assignment algorithm (Gillet and Johnson) and from the genetic algorithm to determine the routes of each subsector. The application proved to be flexible and was able to develop maps and show routes in each subsector. The study of the spectral theory combined with combinatorial optimization studies have become an additional tool to help in decision making.

Keywords: P-medians, Genetic Algorithm, Hydrometer Measuring.

\*Autor para correspondência: e-mail: [suvariapureza@hotmail.com](mailto:suvariapureza@hotmail.com)

<sup>1</sup>Todos os autores assumem a responsabilidade pelo conteúdo do artigo.

### 1. Introdução

O Serviço de Saneamento Básico é de extrema importância para as populações, pois visa controlar os efeitos do processo de urbanização sobre o meio ambiente. Pesquisas comprovam que muitas doenças são causadas através da transmissão de agentes físicos, químicos e biológicos contidos na água.

Segundo Ministério do Meio Ambiente (MMA 2014), saneamento é definido como o conjunto de serviços, infraestruturas e instalações de abastecimento de água, esgotamento sanitário, limpeza urbana e manejo de resíduos sólidos e drenagem de águas pluviais urbanas. De acordo com Guimarães, Carvalho e Silva (2007), o saneamento caracteriza o conjunto de ações socioeconômicas que têm por objetivo alcançar Salubridade Ambiental.

O serviço de saneamento também tem a função de controlar o crescimento de insetos, roedores, entre outros vetores que possam transmitir doenças ao ser humano. É responsabilidade do serviço de saneamento básico eliminar ou reduzir elementos químicos e micro-organismos a concentrações que não sejam prejudiciais à saúde.

Conforme Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE, 2000), 97,9% dos municípios brasileiros têm serviço de abastecimento de água; 78,6% têm serviço de drenagem urbana e 99,4% têm coleta de lixo. Esgotamento sanitário ainda é o serviço que apresenta a menor taxa, mas já é oferecido em mais da metade (52,2%) dos municípios brasileiros. A falta desse serviço pode causar uma morte infantil em média a cada 20 segundos, por isso, a água a ser consumida deve passar por um tratamento que anteceda a chegada às residências. Todo esse processo é feito pelas Estações de Tratamento de Água (ETAs). Essas estações servem para remover os riscos presentes nas águas das fontes de abastecimento através da combinação de vários processos e operações de tratamento até chegar a reservatórios de distribuição.

Quando a referência é saneamento, ainda se tem o setor de faturamento que toma como base o serviço de leitura de hidrômetros, aparelhos utilizados para a marcação do consumo de água, instalados na maior parte de prédios residenciais e públicos. O serviço de leitura geralmente é realizado a partir da utilização de recursos humanos sendo necessária a caminhada ao longo de um percurso. Funcionários, denominados leituristas, se deslocam até as residências, identificam os hidrômetros das mesmas e utilizam um microcomputador para emitir a fatura. Devido à tarefa ser realizada através da caminhada, é possível gerar atrasos e desgaste físico, ocasionando impactos na qualidade dos serviços prestados. Nesse sentido,

estudos sobre os Problemas de Localização de Facilidades e de Cobertura de Arcos são necessários, pois contribuem para melhorias nesse tipo de serviço.

O objetivo dessa pesquisa, a partir de um estudo de caso, consiste na aplicação de uma metodologia heurística para otimizar o caminho percorrido pelos leituristas de hidrômetros. Essa metodologia apresenta um novo algoritmo, desenvolvido por Freitas (2012), baseado na substituição de vértices que utiliza resultados matemáticos da Teoria Espectral. O estudo da teoria espectral combinada com estudos em otimização combinatória, torna-se uma ferramenta a mais no auxílio da tomada de decisão. Nesse sentido, o trabalho tem uma contribuição muito importante pois novas pesquisas podem ser sugeridas dando continuidade ao trabalho em questão.

O estudo está dividido em oito seções, a Seção 1 contém a introdução desta pesquisa. A Seção 2 apresenta uma revisão bibliográfica sobre os algoritmos que solucionam os problemas de localização de facilidades e cobertura de arcos. A Seção 3 descreve o problema através de um estudo de caso. A Seção 4 refere-se à metodologia proposta e a Seção 5, apresenta os algoritmos que suportam o aplicativo desenvolvido neste trabalho. A Seção 6 é dedicada à análise dos resultados obtidos. Finalmente, a Seção 7 traz as conclusões sobre o trabalho realizado.

### **2. Revisão Bibliográfica**

Na literatura, problemas de localização são tratados pela Teoria dos Grafos através da busca de um determinado número  $p$  de centros do grafo e da localização de facilidades. Através dessa busca é que surgiu o chamado Problema das  $p$ -medianas, onde  $p$  é o número de facilidades a serem instaladas buscando minimizar a soma das distâncias de todos os vértices de um grafo à mediana mais próxima.

Dentro da revisão bibliográfica realizada, observamos a importância do método de Teitz e Bart (1968) para a solução do problema das  $p$ -medianas por apresentar qualidade de solução e facilidade de implementação. Este algoritmo faz uma pesquisa baseada na substituição de vértices partindo de uma solução inicial aleatória composta por  $p$  localizações de facilidades e, para cada vértice candidato a uma mediana, encontra, se existir, a localização de facilidade que substituída por esse vértice candidato a mediana melhora a função a ser minimizada. Se essa localização existe, então os vértices são trocados, e o processo é repetido para a nova solução corrente. Quando todos os vértices candidatos tiverem sido analisados, o

## PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

algoritmo termina com uma solução que é um mínimo local. O tempo de processamento deste método depende da solução inicial e desde a sua criação.

Alguns estudiosos vêm buscando melhorias para o método de forma a encontrar boas soluções em um tempo razoavelmente satisfatório e isto pode ser observado sobre o trabalho de Eilon e Galvão (1978) e Whitaker (1993). Atualmente, alguns autores como, Detofeno e Steiner (2009) e Mayerle (2005), propõem melhorias na estrutura do algoritmo clássico de Teitz e Bart (1968) para resolver problemas de grande porte (1600 nós), no entanto observa-se que ambas as modificações são elaboradas a partir da expertise dos autores.

Neste trabalho se propõe uma modificação no algoritmo de Teitz e Bart (1968) a fim de auxiliar na resolução da determinação dos subsetores a serem percorridos por cada leitorista. A vantagem dessa proposta consiste em partir de uma boa solução inicial, que garantirá a preservação da qualidade da solução que ocorre em redes pequenas (até 500 nós). Depois, vértices são excluídos da avaliação, evitando a explosão combinatorial que ocorre no método de Teitz e Bart (1968) tradicional. A proposta será detalhada mais adiante, a partir da descrição do método que utiliza a Teoria Espectral como seu cerne.

Dando sequência a contribuição nos serviços de leitura, destacam-se os Problemas de Cobertura de Arcos que consistem basicamente na determinação de rotas para realização de algum serviço, de modo tal que o custo seja mínimo.

Assim, como os Problemas de Localização, os Problemas de Cobertura de Arcos também pertencem à classe dos problemas de otimização combinatorial NP- difíceis e estão associados a alguns problemas bem conhecidos na literatura, como o problema do carteiro rural e o problema do carteiro chinês contendo restrições de capacidade.

Pesquisas relacionadas aos Problemas de Cobertura de Arcos podem ser destacadas através de alguns autores como, por exemplo, Sherafat (2004) que considera o problema de determinar um circuito de custo mínimo que cobre um dado subconjunto de arcos, de arestas e de nós de um grafo misto, sujeito a algumas restrições nos vértices (restrições que proíbem conversões indesejáveis nos cruzamentos de malhas urbanas) e Costa (1997) que propõe em seu trabalho uma solução para o processo de entrega de correspondências. Nesse trabalho, o autor compara algoritmos que solucionam o Problema de Cobertura de Arcos, otimizando o percurso realizado por cada carteiro.

Tratando-se ainda dos problemas de Cobertura de Arcos, aparece o trabalho de Smiderle (2001), na solução do serviço de leitura dos medidores das contas de água na cidade de Pato Branco/PR. A autora, dentre os doze setores de atendimento existentes, escolhe

## PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

apenas um e divide-o em outros setores menores, determinando o percurso mínimo para cada leitorista dentro de sua rota.

Os Problemas de Cobertura de Arcos também podem ser resolvidos através dos Algoritmos Genéticos (AG's) que são metaheurísticas flexíveis, podendo se adaptar às restrições de cada problema. Os Algoritmos Genéticos foram introduzidos em 1975 através do trabalho "Adaptation in Natural and Artificial Systems" escrito por Holland (1975). Esses algoritmos são baseados na teoria da seleção natural e evolução das espécies.

Os algoritmos genéticos tomam emprestado vários termos da genética com a qual mantêm conceitos análogos. Os termos principais são:

- População: conjunto de cromossomos ou soluções;
- Cromossomo: conjunto de genes. Cada cromossomo representa uma solução do problema. Muitas vezes é tomado como sinônimo de indivíduo;
- Gene: menor unidade de informação em um cromossomo. Cada gene representa uma variável da solução do problema;
- Locus: posição de um gene em um cromossomo. Alguns genes podem ter seu locus alterado em processo de cruzamento ou mutações;
- Cruzamento (ou crossover): processo de reprodução em que há combinação de genes dos cromossomos originando um ou mais descendentes. O cruzamento é o principal responsável pela variabilidade genética;
- Mutação: anomalias que causam a alteração aleatória de genes, seja na sua localização, seja no seu conteúdo;
- Seleção Natural: processo que elimina os indivíduos menos adaptados em relação à cada geração da população;
- Geração: iteração do algoritmo genético;
- Aptidão (ou fitness): indicador qualitativo de um indivíduo. O grau de aptidão de um indivíduo é obtido a partir de uma função objetivo;
- Função objetivo: é a função matemática que avalia as soluções (indivíduos) em relação ao problema.

Muitas pesquisas são desenvolvidas utilizando algoritmos genéticos. O algoritmo parte de uma população inicial aleatória de indivíduos, que evolui através das gerações que são iterações sucessivas. Este processo segue até ser encontrada a solução ótima ou uma solução satisfatória.

## PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Tanto os problemas de Localização de Facilidades quanto os problemas de Cobertura de Arcos possibilitam soluções viáveis de importância econômica e tecnológica, pois por menor que seja o ganho obtido, sua aplicação ainda é viável, uma vez que se tratam, em geral, de problemas de grande porte onde algoritmos exatos são geralmente de difícil aplicação direta dentro de um tempo computacional razoável.

### 3. Descrição do Estudo de Caso

Através de um estudo de caso, com a finalidade de testar a metodologia proposta, preliminarmente, foi realizada uma pesquisa de campo sobre o atual funcionamento da Companhia Riograndense de Saneamento – CORSAN, em específico, os serviços de leitura de hidrômetros.

A companhia atualmente possui oito funcionários na realização dos serviços de leitura de hidrômetros, denominados leituristas. Cada um dos oito leituristas tem a responsabilidade de percorrer uma rota por dia, sendo que poderá concluí-la em até três dias úteis. Essas rotas são determinadas pelo Sistema Comercial Integrado (SCI), um programa implementado especificamente para serviços gerais da CORSAN.

Tendo sua rota estabelecida, o leiturista dirige-se ao local dando início as marcações. No percurso da rota, o leiturista deverá ser capaz de: identificar o hidrômetro na residência, fazer a leitura e digitar os dados em um microcomputador, emitir a fatura no local e entregar ao cliente. Os serviços oferecidos pela CORSAN utilizam um mapa da cidade que está dividido em dez setores.

Para melhor visualização e entendimento do problema, foi utilizado um mapa georeferenciado da cidade de Rio Grande. A Figura 1 mostra o mapa, destacando o setor oito que contém 8.016 ligações distribuídas em 24 rotas (dados obtidos através do SCI).

Em geral, o serviço de leitura é realizado todos os dias, tendo como meta concluir todas as ligações da cidade em aproximadamente 20 dias úteis. Sendo que, todas as residências que se utilizam dos serviços da CORSAN, tanto as que possuem hidrômetro quanto as que não possuem o aparelho instalado são visitadas e inspecionadas pela empresa.

Para o desenvolvimento dessa pesquisa foi escolhido o setor oito dentre os dez setores estabelecidos atualmente pela empresa. Esta escolha se deu pelo fato do setor oito apresentar características gerais de centro e de bairros.

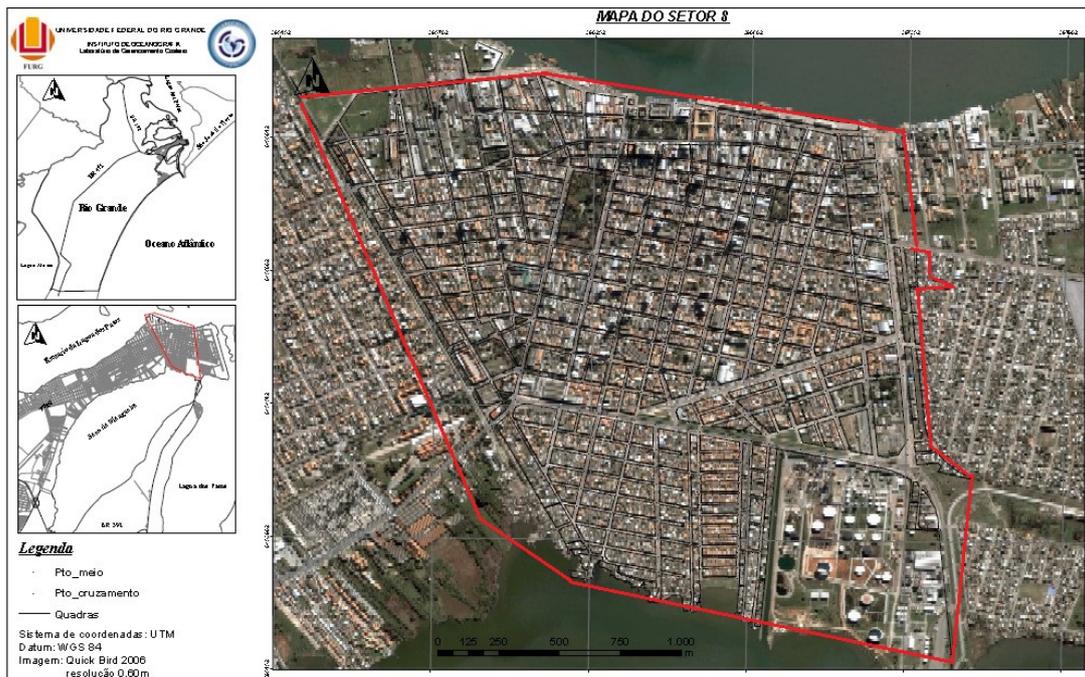


Figura 1 - Imagem de satélite da cidade de Rio Grande, em destaque o setor oito.

#### 4. Metodologia Proposta

A metodologia proposta, neste trabalho, segue as etapas básicas da Pesquisa Operacional, a qual passa pela identificação do problema, a formulação de um modelo matemático com o uso de hipóteses simplificadoras, a resolução do modelo, a validação dos resultados e o posterior oferecimento dos algoritmos para implementação. A partir das informações obtidas foi escolhido o setor oito para o estudo de caso. O setor oito contempla características importantes, já que abrange grande parte da área central do município, e também locais periféricos. O modelo proposto, por possuir características gerais, pode ser adaptado para outros setores de atendimento.

A partir das 24 rotas obtidas pelo SCI, foi possível determinar o número de ligações e de hidrômetros nas 24 rotas que compõem o setor oito. Além disso, as distâncias totais percorridas em cada uma das 24 rotas apresentadas totalizam 115.000 metros. Para isso, teve-se como auxílio, o programa Google Maps (programa desenvolvido pelo Google, onde é possível obter as distâncias de um local a outro e consequentemente sua rota). A Tabela 1 apresenta os dados obtidos pelo SCI e pelo Google Maps.

A Tabela 1 exibe uma diferença entre o número de hidrômetros e o número de ligações. Essa diferença é devido à existência ou não do medidor na residência, o que não

## PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

interfere no serviço de leitura, pois cada funcionário tem a tarefa de inspecionar todos os endereços que constam na rota, possuindo ou não hidrômetro.

Tabela 1: Número de ligações e de hidrômetros no setor oito.

Rota	Nº Ligações	Nº Hidrômetros	Distância Metros	Rota	Nº Ligações	Nº Hidrômetros	Distância Metros
142	376	313	7.300	156	294	158	7.600
143	313	228	4.500	157	338	273	3.900
144	401	318	6.600	158	393	314	5.100
145	317	261	3.800	161	360	205	3.300
146	346	270	4.000	162	308	143	3.400
147	375	319	6.800	163	345	299	3.100
148	317	208	9.600	164	314	266	3.500
151	339	290	4.600	165	343	277	3.100
152	265	234	3.200	166	402	359	4.700
153	294	308	4.500	167	256	200	3.500
154	342	274	3.600	168	338	263	4.300
155	353	284	3.400	171	287	242	5.100
				<b>Total</b>	<b>8.016</b>	<b>6.306</b>	<b>115.000</b>

Além dos dados numéricos, o programa Google Maps também possibilitou a visualização de um mapa contendo o percurso estipulado de acordo com os endereços do SCI, conforme apresentado na Figura 2.

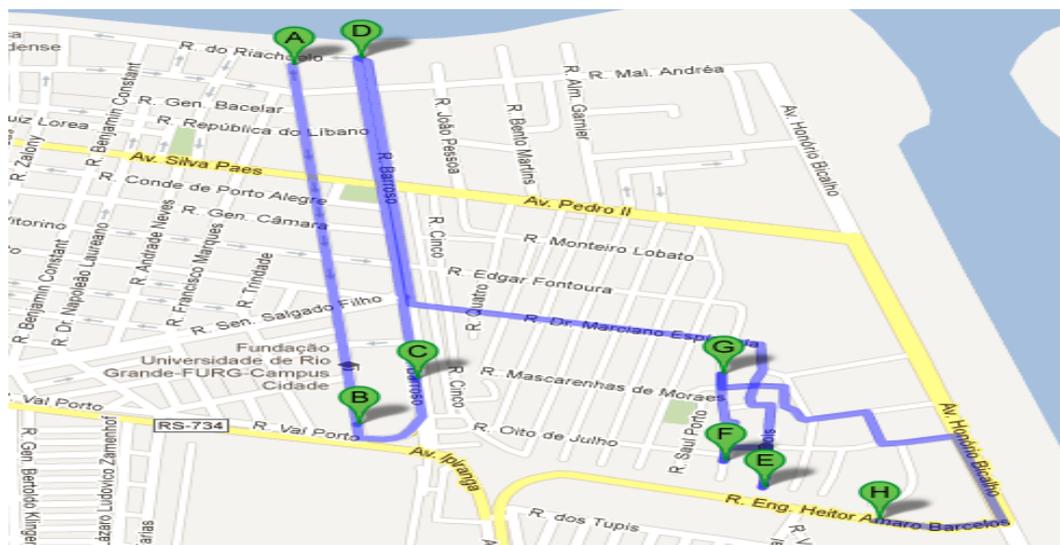


Figura 2 - Representação em mapa da rota 148 do SCI.

De acordo com a Figura 2, a cor azul representa o percurso da rota e as letras em ordem alfabética indicam o sentido do trajeto.

## PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Nos serviços de leitura, o funcionário percorre as ruas referentes às residências onde deve realizar a marcação do consumo de água. Em cada rua existem trechos de quadra, denominação dada aos pedaços de rua que começam e terminam na intersecção de duas ruas transversais.

Para o desenvolvimento do modelo foi necessário definir a área total e procurar a melhor diferenciação dos trechos. Para isso, foi utilizado um mapa georeferenciado tendo a localização do setor oito. Dentro deste mapa foi introduzido um ponto em cada metade de trecho de quadra e nas interseções de ruas para determinar os pontos de parada, representando todas as residências contidas no trecho de quadra.

Além disso, os pontos acrescentados nas interseções de ruas serviram para estabelecer o percurso em cada rota. Também, foram determinadas as coordenadas de cada um dos 1691 pontos que delimitaram os trechos de quadra e a matriz das distâncias entre dois pontos. Tanto as coordenadas quanto às distâncias foram determinadas com o auxílio do software Autodesk® AutoCAD® Map 3D em coordenadas *Universal Transversa de Mercator* – UTM, Robison (1995).

Posteriormente, foram determinadas as 24 medianas utilizando o algoritmo de Teitz e Bart (1968) modificado por Freitas (2012). Essas medianas foram designadas aos demais pontos do mapa através do algoritmo de designação de Gillett e Johnson adaptado por Golden *et al.* (1977) e Bodin *et al.* (1981), formando 24 subsetores de atendimento. Definido os 24 subsetores, foi realizado o roteamento dentro de cada um dos subsetores, totalizando uma rota para cada subsetor. Para a determinação das 24 rotas foi utilizado o algoritmo genético. Na próxima seção, são detalhados os algoritmos utilizados para o desenvolvimento da ferramenta computacional.

### **5. Algoritmo de Teitz e Bart Modificado por (CADP) e o Algoritmo Genético**

Segundo Höner (2009), o algoritmo de Teiz e Bart, possui na maioria dos casos, a melhor qualidade de solução encontrada, mas, em tempo de processamento, torna-se eficiente apenas em redes pequenas de até 100 nós.

A rede do estudo de caso para determinação dos subsetores a serem percorridos por cada leitorista é considerada de grande porte. Nesse sentido, a utilização do algoritmo de Teitz e Bart (1968) modificado a partir de uma nova medida de centralidade, denominada de autovetor distância-peso ( $C_{ADP}$ ), é indicada. O novo método baseado no algoritmo de Teitz e Bart (1968) utiliza os vértices mais centrais de uma rede como conjunto solução inicial, além

## PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

de apontar os próximos vértices a serem testados. Este algoritmo pode ser referido também como o Método das Regiões. Detalhes sobre a fundamentação matemática do algoritmo podem ser encontrados em Freitas (2012).

A seguir são apresentados os passos do algoritmo bem como a descrição de cada um deles:

**Passo 1:** Dividir a região  $R$  em  $p$  regiões, de modo que  $R = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_{24}$ .

**Passo 2:** Aplicar o método das potências em cada uma das  $p$  regiões, determinando assim os autovetores dominantes  $V_1, V_2, \dots, V_{24}$ , de cada uma delas.

**Passo 3:** Para cada vetor  $V_i$  com  $i = 1, \dots, p$ , formar conjuntos  $V'_i$  com os pontos correspondentes às componentes de  $V_i$  ordenadas em ordem crescente.

**Passo 4:** Considerar um percentual do total de elementos de  $V'_i$ . Para cada conjunto  $V'_i$  do passo 3, formar subconjuntos ordenados  $X_i$  com os  $j$  primeiros elementos de  $V'_i$ . Denotar esses subconjuntos por:  $X_i = \{x_{in} \in X_i, n = 1, \dots, j\}$ .

**Passo 5:** Formar o conjunto  $S$ ,  $S = \{x_{i1} \in X_i, i = 1, \dots, p\}$ , denominado solução inicial do problema. Calcular o valor da Função Objetivo para o conjunto  $S$ .

**Passo 6:** Rotular os pontos de  $x_{ik} \in (X_i - S)$ , como não testados.

**Passo 7:** Para algum  $i$ , selecionar o elemento  $x_{ik} \in (X_i - S)$  não testado, mais próximo de  $x_{in} \in S$  de acordo com a ordenação de  $X_i$ .

**Passo 8:** Computar a "redução"  $\Delta_{nk}^i$  no número de transmissão, da substituição de  $x_{in}$  por  $x_{ik}$ , isto é, compute:  $\Delta_{nk}^i = \sigma(S) - \sigma(S \cup \{x_{ik}\} - \{x_{in}\})$ , de forma que:

i) Se  $\Delta_{nk}^i \leq 0$  rotular o ponto  $x_{ik}$  como testado e voltar ao passo 7;

ii) Se  $\Delta_{nk}^i > 0$  efetuar  $S \leftarrow S \cup \{x_{ik}\} - \{x_{in}\}$ , rotular  $x_{ik}$  como testado e voltar ao passo 7.

**Passo 9:** Repetir os passos 7 e 8 até que todos os pontos dos subconjuntos  $X_i$  estejam rotulados como "testados". Este procedimento é referido como ciclo. Se, durante o último ciclo nenhuma substituição foi feita no passo 8(ii), ir para passo 10. Caso contrário, rotular todos os pontos como "não testados" e retornar ao passo 7.

**Passo 10:** Parar. O conjunto  $S$  atual é o conjunto de  $p$ -medianas  $\bar{X}_p$ .

O passo 1 do algoritmo consiste em dividir o setor oito em 24 regiões. Em cada uma das 24 regiões são obtidos 24 grafos os quais são determinadas a matriz de distâncias mínimas de cada um deles.

## PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

No passo 2, em cada umas das 24 matrizes, é aplicado o método das potências e através dele, determinado os autovetores dominantes  $V_1, V_2, \dots, V_{24}$  de cada região.

No passo 3, cada componente do autovetor corresponde a um valor que está associada a um ponto do grafo. As componentes são ordenadas e é computada a ordem dos pontos correspondentes.

O passo 4, é responsável pela exclusão dos pontos menos centrais de cada região, de acordo com a centralidade de autovetor distância-peso. Um percentual deve ser utilizado, nesse estudo 30%, formando subconjuntos cujos elementos são os pontos correspondentes às primeiras componentes dos autovetores do passo 3.

O passo 5, seleciona o primeiro elemento de cada subconjunto do passo 4, formando o conjunto solução inicial. Para este conjunto, é calculado o valor da Função Objetivo.

No passo 6, são rotulados os pontos que não fazem parte do conjunto formado no passo 5 como "não testados".

No passo 7, tem-se uma contribuição importante no desenvolvimento desse novo algoritmo, uma vez que, ao contrário do Teitz e Bart (1968) tradicional que compara todos os pontos do conjunto  $S$  com um ponto qualquer não testado, a modificação proposta indica qual o ponto não testado será utilizado para realizar a comparação com apenas um ponto específico da solução corrente  $S$ . Pontos candidatos a mediana seguem a ordenação das componentes do autovetor dominante e, ainda, que em regiões (grafos) não ponderados, não ocorre de pontos de uma mesma aglomeração serem medianas de uma rede, tornando-se desnecessária a análise da possibilidade de dois ou mais pontos de uma mesma aglomeração fazerem parte simultaneamente do conjunto solução.

No oitavo passo, é feita a comparação entre os valores da função objetivo do conjunto solução corrente e do conjunto formado pela substituição de um ponto  $x_{ik} \in S$  pelo ponto não testado  $x_{ik} \in (X_i - S)$  mais próximo na ordenação de  $X_i$ . Se o valor da função objetivo diminuir, é feita a substituição e  $x_{ik}$  passa a fazer parte da nova solução, caso contrário, ele é rotulado como testado e volta-se ao passo 7.

O ciclo é caracterizado no passo 9. É nesta etapa que os passos 7 e 8 são repetidos até que não haja mais alterações durante o último ciclo completo. Caso isso ocorra, o passo 10 é responsável pelo fim do algoritmo e o conjunto solução das medianas  $\bar{X}_p$  é considerado a melhor aproximação do ótimo.

## PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

A partir do conjunto solução mediana, o algoritmo de designação, proposto por Gillet e Johnson, é executado, sendo descrito a seguir:

**Passo 1:** Considerar um grafo que contenha inicialmente  $i'$  pontos, ainda sem designação. Sendo  $M_{i'}$  pontos medianas.

**Passo 2:** Atribuir  $M_{1(i')}$  como primeira mediana mais próxima de  $i'$  e  $M_{2(i')}$  como segunda mediana mais próxima de  $i'$ .

**Passo 3:** Calcular a razão  $r_{i'}$  para cada ponto  $i'$  entre  $M_{1(i')}$  e  $M_{2(i')}$ , sendo:

$$r_{i'} = \frac{M_{1(i')}}{M_{2(i')}}.$$

**Passo 4:** Designar os pontos que obtiveram menor razão no Passo 3. O processo de designação começará pelos pontos que obtiverem menor razão. Para todos os  $i'$  pontos, exceto os pontos medianas, serão distribuídos em ordem crescente de designação respeitando os valores determinados por  $r_{i'}$ , formando assim os  $n'$  agrupamentos.

É importante ressaltar que o cálculo da razão  $r_{i'}$  é realizado para identificar a “urgência” de cada ponto  $i'$  no momento de designação, ou seja, quanto menor for o valor de  $r_{i'}$  maior será a urgência.

No Passo 1, tem-se o mapa do setor oito com 1691 pontos cadastrados e as 24 medianas obtidas pelo Algoritmo de Teitz e Bart Modificado.

No Passo 2, é atribuído à primeira e à segunda mediana mais próximas dos 1667 pontos restantes do mapa.

No Passo 3, é calculado a razão entre as medianas determinadas no Passo 2, respeitando a ordem da primeira mais próximas dos pontos sobre a segunda.

O Passo 4 é responsável pela distribuição dos 1667 pontos em ordem crescente de designação às 24 medianas, formando os 24 subsetores dentro do setor oito.

A partir da formação dos 24 subsetores o Algoritmo Genético é então executado para formar uma rota em cada subsetor. Este algoritmo pode ser resumido nos seguintes passos:

**Passo 1:** Escolher aleatoriamente uma população inicial formada por  $n$  rotas.

**Passo 2:** Avaliar as  $n$  rotas medindo suas distâncias através da função de aptidão.

**Passo 3:** Selecionar duas rotas que farão parte do cruzamento.

**Passo 4:** Utilizar um operador de cruzamento.

**Passo 5:** Fazer mutação para cada geração, respeitando o percentual estabelecido.

## PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

**Passo 6:** Os passos 2 e 3 são repetidos até que uma solução aceitável seja encontrada ou até um critério de parada instituído.

No Passo 1, é gerada aleatoriamente uma população inicial de 100 rotas, através da representação por caminho. Essas rotas seguem uma sequência de pontos, do início ao fim do percurso. Por exemplo, uma rota gerada pelos pontos (1,6,5,3,2,4,7) obedecerá ao percurso, conforme Figura 3.

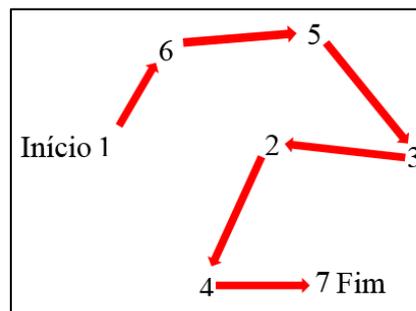


Figura 3 - Representação por caminho de uma rota qualquer.

O Passo 2, avalia as 100 rotas de acordo com a função aptidão a qual mede as distâncias de cada rota, ordenando em ordem crescente de distância.

No Passo 3, utiliza-se o método de seleção por roleta para determinar as rotas que farão parte do cruzamento. O Algoritmo para o método de seleção por roleta segue a seguinte ordem:

**Passo 1:** Somar a aptidão de todas as rotas da população ( $A_r$ );

**Passo 2:** Gerar um número aleatório:  $0 < m \leq A_r$ ;

**Passo 3:** Selecionar a primeira rota da população cuja aptidão, somada à aptidão das rotas precedentes é maior ou igual a  $m$ , ou seja,  $\sum A_i \geq m$ .

Após a seleção das rotas o Operador de Cruzamento Heurístico – HX é utilizado com taxa de 85% para cada geração. Segundo, (Coley, 1999 e Goldberg, 1989), o valor da taxa de cruzamento fica compreendido entre 4% e 95%. Um exemplo ilustrativo sobre o funcionamento do operador HX é descrito no Apêndice.

No passo 5, é feita a mutação através do operador de inversão simples, com uma probabilidade fixada, no valor de 1% para cada geração de rotas. Este operador, dentro de

## PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

uma sequência de pontos, seleciona aleatoriamente dois deles e inverte sua ordem formando assim, uma nova sequência de pontos.

O operador genético de mutação modifica, em uma taxa muito baixa, aleatoriamente um único componente da solução. De acordo com Dias (2005) o operador de mutação tem como objetivo introduzir variedade genética em cada geração evitando assim a parada prematura do algoritmo em um ótimo local.

No Passo 6, é utilizado como critério de parada o número máximo de 25000 iterações. As soluções são comparadas e é escolhida a solução que melhor respondeu a função aptidão, ou seja, dentro do setor oito as 24 rotas de custo mínimo em distância percorrida são determinadas.

Os algoritmos foram implementados e desenvolvidos em linguagem "Object Pascal" (programação gráfica orientada a objetos) utilizando-se do software Delphi 2010. No entanto, foi desenvolvido um aplicativo denominado "Cobertura de Arcos" o qual pode ser consultado em Pureza (2013).

### **6. Análise de Resultados**

A Figura 4 mostra as 24 medianas e os 24 subsetores de atendimento dentro do setor oito. Esses resultados foram obtidos pela aplicação dos algoritmos, Teitz e Bart Modificado e Gillet e Johnson.

Após a obtenção dos 24 subsetores, foi estabelecido um percurso otimizado em cada um deles através do Algoritmo Genético, originando 24 rotas com custo mínimo em distância percorrida. Foram utilizados os pontos de interseções de rua para estabelecer o percurso de cada rota de maneira que se aproximasse do problema real. A Figura 5 apresenta uma das rotas referentes a um dos 24 subsetores gerados pelo aplicativo desenvolvido.

A Figura 5 representa a nova rota de um subsetor dentro do setor oito. Essa figura não apresenta todos os nomes de ruas para que o leitor tenha melhor visualização, porém o aplicativo desenvolvido permite acrescentar todas as denominações de ruas conforme o mapa georeferenciado utilizado neste trabalho.

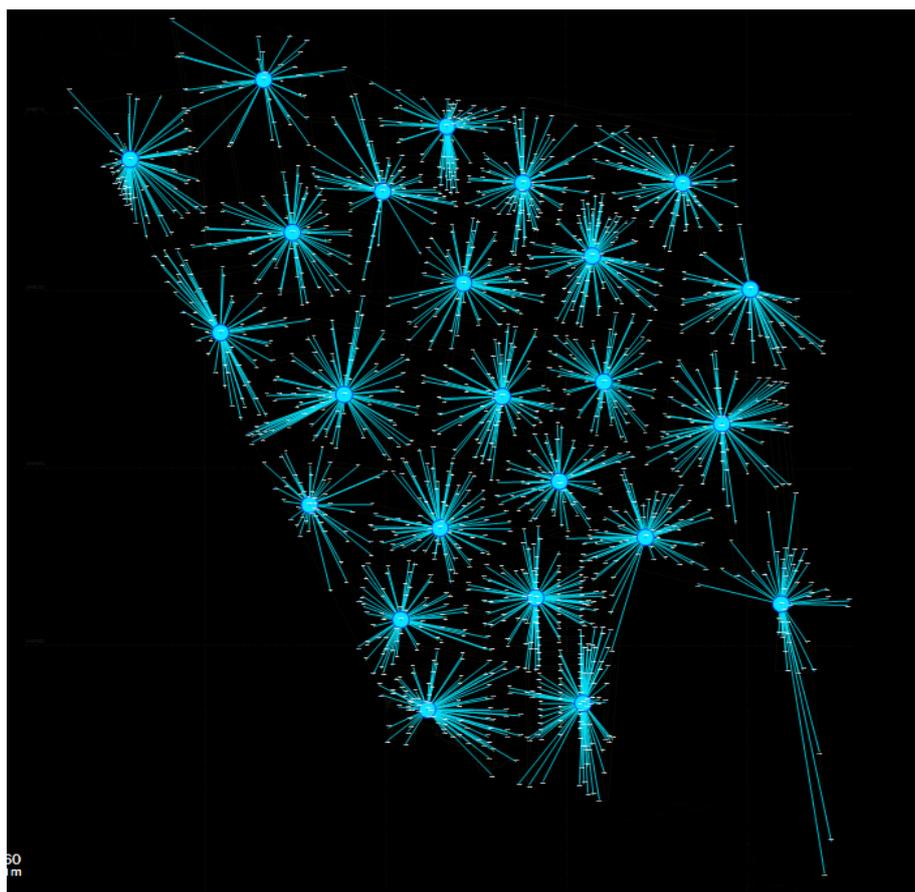


Figura 4 - Visualização das 24 medianas e subsetores do setor oito.

## 7. Conclusões

A aplicabilidade do algoritmo de Teitz e Bart Modificado em problemas reais de médio e grande porte torna-se viável na medida em que é capaz de identificar os pontos mais centrais de um mapa a ser particionado, determinando uma estratégia de solução inicial, que explora eficientemente o espaço de busca por melhores soluções. A utilização do algoritmo de Teitz e Bart Modificado ofereceu uma solução satisfatória para obtenção das medianas dentro de um tempo computacional razoável.

É possível afirmar que o novo método de resolução que se utiliza da estrutura do algoritmo de Teitz e Bart (1968) é matematicamente verificável, não se tratando de um conhecimento circunstancial e sua fundamentação encontra-se na Álgebra Linear via Teoria Espectral.

Em relação ao algoritmo genético foi testado operador de cruzamento HX, que de acordo com o trabalho realizado por Taufer (2012), apresentou melhor desempenho em relação a outros operadores de cruzamento.

## PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

A distância total percorrida em todas as 24 novas rotas foi de 113.260,10 metros. Esse valor comparado com as distâncias atualmente praticadas pela empresa, que são de 115.000 metros, resultou em uma diferença de 1.740 metros. Essa diferença não é tão significativa, quando considerada em apenas um setor. Porém, se o modelo proposto for aplicado nos dez setores do Município, o total da distância percorrida irá diminuir consideravelmente.

Comparando as rotas do SCI com as rotas obtidas no aplicativo não houve grande discrepância entre as distâncias. No entanto, as novas rotas geradas tiveram seus percursos otimizados, não interferindo nos endereços do SCI.

Além disso, beneficiando-se das contribuições proporcionadas pela área acadêmica, existe a possibilidade de desenvolver um sistema de informação que poderia vir otimizar o processo e garantir uma melhor fiscalização.

Finalmente, conclui-se a verificação e a aplicabilidade de uma estratégia que combina a teoria espectral com a otimização combinatória sobre um problema do mundo real. É esperado também que novas pesquisas possam ser sugeridas a partir da teoria espectral, podendo assim dar continuidade ao trabalho realizado.

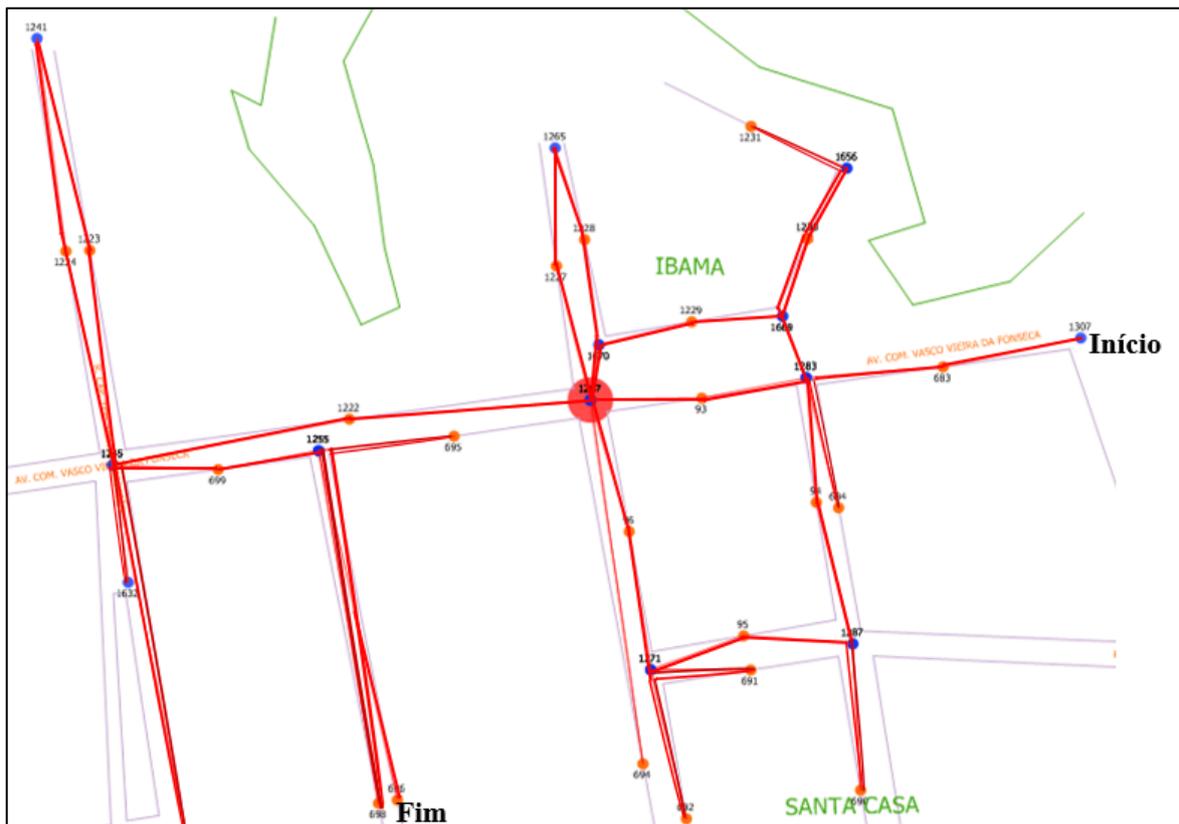


Figura 5- Rota no Subsetor sete.

### Referências

- Bodin, L.; Golden, B.; Assad, A. (1981). Routing and scheduling of vehicles and crew: The state of the art. *Computers & Operations Research*, v. 10, n. 2, p. 39-55.
- Coley, D. A. (1999). *Introduction to genetic algorithms for scientists and engineers*. Singapore: World Scientific.
- Costa, D. M. B. (1997). *Aplicação de algumas técnicas da pesquisa operacional na otimização dos serviços postais*. Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR.
- Detofeno, T. C.; Steiner, M. T. A. (2009). Otimização das rotas de coleta de resíduos urbanos, utilizando técnicas de pesquisa operacional. *Anais do CNMAC* v. 2, p.706-712.
- Dias, A. (2005). *O problema da p-mediana aplicado ao problema da gestão ótima da diversidade*. Dissertação (Mestrado em Matemática e Aplicações), Universidade de Aveiro, Portugal.
- Eilon, S.; Galvão, R. D. (1978). Single and double vertex substitution in heuristic procedures for the p-median problem. *Management Science*, v. 24, p.1763-1766.
- Freitas, C. R. (2012). *Teoria espectral aplicada a problemas de localização*. Dissertação do Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, RS.
- Goldberg, D. E. (1989). *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning*. Reading, MA: Addison-Wesley.
- Golden, B. L.; Magnanti, T. L.; Nguyen, H. Q. (1977). Implementing vehicle routing algorithms. *Networks*, v. 7, p. 113-148.
- Guimarães; Carvalho e Silva. Saneamento básico. (2007). Disponível em: <<http://www.ufrj.br/institutos/it/deng/leonardo/downloads/APOSTILA/Apostila%20IT%20179/Cap%201.pdf>>. Acesso em: 02 set. 2015.
- Holland, J. (1975). *Adaptation in natural and artificial systems*. Cambridge: University of Michigan Press.
- Höner, D. (2009). *Resolução do problema das p-medianas não capacitado: Comparação de algumas técnicas heurísticas*. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC.
- IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (2000). *Pesquisa Nacional de Saneamento Básico 2000*. Disponível em: <<http://www.ibge.gov.br/home/presidencia/noticias/27032002pnsb.shtml>>. Acesso em: 02 set. 2015.
- Mayerle, S. F. (2005). *Notas de aula, UFSC, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Florianópolis, SC, 57-58*.
- MMA - Ministério do Meio Ambiente (2014). Disponível em: <<http://www.mma.gov.br/cidades-sustentaveis/residuos-solidos/instrumentos-da-politica-de-residuos/plano-nacional-de-saneamento-basico>>. Acesso em: 21 mar.2014.

## PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Pureza, S. A. O. (2013). Uma metodologia heurística para minimizar o roteiro nos serviços de leitura de hidrômetros. Dissertação do Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, RS.

Robinson, A. H. (1995). Elements of cartography. New York: John Wiley & Sons.

Sherafat, H. (2004). Algoritmos heurísticos de cobertura de arcos. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC.

Smiderle, A. (2001). Técnicas da pesquisa operacional aplicadas a um problema de cobertura de arcos. Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR.

Taufer, F. S. G. (2012). Análise dos operadores de cruzamento do algoritmo genético aplicado ao problema do caixeiro viajante. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, RS.

Teitz, M. B.; Bart, P. (1968). Heuristics methods for estimating the generalized vertex median of a weighted graph. Operations Research, v. 16, p. 955-961.

Whitaker, R. A. (1983). A fast algorithm for the greedy interchange of large-scale clustering and median location problems. INFOR, 21, p. 95-108.

### APÊNDICE

Exemplo ilustrativo do funcionamento do operador HX.

Considere  $P = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$ , uma população inicial contendo dez rotas. Sejam as rotas  $R_1$  e  $R_2$  os cromossomos pais. Ambos contêm o mesmo número de pontos da população inicial, porém com ordenação diferente. Os pontos são os números representados entre parênteses.  $R_1 = (2, 4, 7, 1, 3, 9, 5, 8, 10, 6)$  e  $R_2 = (1, 8, 7, 6, 3, 9, 2, 10, 4, 5)$ . Partindo disso, é necessário obedecer alguns passos:

**Passo 1:** Escolha aleatoriamente um dos números pertencentes a  $P$ . Por exemplo 10. A partir daí comece a construir o cromossomo Filho, rota  $R'$ .

$R' = (10, \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_)$

**Passo 2:** Faça uma comparação entre os caminhos de  $R_1$  e  $R_2$ . Para isso, o sucessor do número escolhido no passo 1.

$R_1 = 10 - 6$  e  $R_2 = 10 - 4$

Supondo que o caminho de 10 a 6 é o menor, então inclua 6 em  $R'$ .

$R' = (10, 6, \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_)$

**Passo 3:** Repita o mesmo procedimento para os próximos números.

$R_1 = 6 - 2$  e  $R_2 = 6 - 3$

## PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Supondo que o caminho de  $R_1$  foi o menor, então verifique se não ocorrerá subciclo. Caso não ocorra inclua 2 a  $R'$ . Se ocorrer subciclo utilize o caminho de  $R_2$ . Neste passo não ocorreu subciclo então:

$$R' = (10, 6, 2, \_, \_, \_, \_, \_, \_).$$

**Passo 4:** Repita o mesmo procedimento dos passos anteriores.

$$R_1 = 2 - 4 \text{ e } R_2 = 2 - 10$$

Supondo que o menor caminho seja o de  $R_2$ , então faça a verificação.

$$R' = (10, 6, 2, 10, \_, \_, \_, \_, \_)$$

Ocorreu um subciclo, então nesse caso, o ponto 4 de  $R_1$  entrará como solução, logo:

$$R' = (10, 6, 2, 4, \_, \_, \_, \_, \_)$$

Repita este procedimento para os demais pontos de  $R_1$  e  $R_2$ . Quando os caminhos de  $R_1$  e  $R_2$  forem iguais, escolha qualquer um deles. Caso a sequência dos números nas rotas  $R_1$  e  $R_2$  acabar retorne ao início e utilize um número que ainda não tenha sido incluído a  $R'$ . Dando continuidade a uma nova rota  $R' = (10, 6, 2, 4, 5, 1, 3, 9, 5, 8)$ .