

ALOCAÇÃO DE UNIDADES URBANAS DE LAZER POR UM MODELO DE P-MEDIANAS

André Ebling Brondani^a, Francisca Andrea Macedo França^a, Roberto Velasco
Kopp Júnior^b, Paulo Oswaldo Boaventura Netto^{c*}, Samuel Jurkiewicz^c

^a*Universidade Federal Fluminense – UFF, Volta Redonda – RJ*

^b*Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC, Rio de Janeiro – RJ*

^c*Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Rio de Janeiro – RJ*

Resumo

O problema das p -medianas, que consiste em localizar p facilidades (medianas) em uma rede, minimizando-se a soma de todas as distâncias de cada ponto de demanda à sua mediana mais próxima, tem sido utilizado como uma ferramenta que auxilia na tomada de decisões de localização. Este estudo busca localizar, através de uma heurística especificamente projetada, um dado número de unidades urbanas de lazer (largos, praças, praças esportivas, *pocket parks*, bosques e parques municipais), em uma área da região norte do Rio de Janeiro.

Palavras-chave: p -medianas, Unidades Urbanas de Lazer, grafos.

Abstract

The p -median problem, which is to locate p facilities (medians) on a network by minimizing the sum of all distances from each demand point to its nearest median has been used as a helping tool for locational decisions. This study seeks to locate, through a specifically designed p -median heuristic, urban leisure units (squares, parks, sports venues, pocket parks, forests and city parks) in an area north of Rio de Janeiro.

Keywords: p -median, Urban Units Leisure, graphs.

*Autor para correspondência: e-mail: boventu@pep.ufrj.br

1. Introdução

Problemas de localização tratam de decisões sobre posicionamento de facilidades, considerando clientes que devem ser servidos de forma a otimizar um certo critério, Drezner (1995) e Daskin (1995). O termo “facilidades” é genérico para fábricas, depósitos, praças, escolas, postos de saúde, unidades policiais etc., enquanto os “clientes” são habitualmente pessoas físicas, unidades de vendas, estudantes, empresas etc. Em geral, as facilidades podem tanto ser selecionadas como novas unidades a serem abertas, quanto escolhidas no subconjunto das já existentes.

As aplicações dos problemas de localização de facilidades são frequentemente consideradas em separado, conforme haja ou não alguma emergência envolvida, Lorena *et al* (2001). Se ela existir, as aplicações procuram maximizar a satisfação dos clientes em detrimento dos custos necessários para o alcance de tal objetivo. Exemplos dessas aplicações são a localização de delegacias de polícia, postos de saúde, corpo de bombeiros e ambulâncias entre outros. No setor privado, ou quando não há emergências, os custos são fixados e suas aplicações envolvem fábricas, depósitos, lojas de franquias e assim por diante. No setor público, exemplos de localizações sem caráter emergencial são escolas e pontos de ônibus.

Um problema de localização não emergencial clássico e com um grande número de aplicações práticas é o problema das p -medianas, cujas primeiras formulações foram apresentadas em Hakimi (1964 e 1965). Ele foi, mais tarde, reconhecido como um problema NP-completo, Garey & Johnson (1979). Chiyoshi & Galvão (2000) apresentaram um estudo probabilístico do comportamento da metaheurística simulated annealing com o problema. Werneck & Resende (2004) propuseram uma heurística híbrida. Um *survey* dedicado ao uso de metaheurísticas no problema é apresentado por Mladenović *et al* (2007). Alekseeva *et al* (2008) estuda a complexidade das buscas locais aplicadas ao problema. Uma avaliação

baseada na complexidade de um conjunto de instâncias é feita por Goldengorin & Krushinsky (2011). Avella *et al* (2012) estuda problemas de p -medianas de grande porte. Brimberg & Drezner (2013) propõem uma nova heurística.

Este estudo busca identificar, através de um modelo de p -medianas, locais suscetíveis de serem utilizados como unidades de lazer e concentração de serviços em uma área previamente delimitada na região leopoldinense do subúrbio carioca, de modo a garantir que tais locais sejam de fácil acesso à população, procurando-se, com esse objetivo, minimizar as somas das distâncias entre tais unidades de lazer.

2. Conceitos preliminares

Um *grafo não-orientado* é uma estrutura $G = (V,E)$, onde V é um conjunto finito e não vazio, cujos elementos são denominados *vértices* ou *nós*, sendo E um conjunto de partes a dois elementos de V , denominadas *arestas*. Os conceitos de grafos aqui utilizados estão em Boaventura & Jurkiewicz (2009), de onde utilizamos a noção de caminho entre dois vértices, μ_{ij} . Definiremos $V(\mu_{ij})$ como o conjunto de caminhos entre dois vértices i e j . Associadas ao grafo G temos as seguintes matrizes de ordem n :

- i. A *matriz de adjacência* $A = (a_{ij})$, onde $a_{ij} = 1$, se $\{i,j\} \in E$ e $a_{ij} = 0$, em caso contrário.
- ii. A *matriz de distâncias* $D = (d_{ij})$, onde $d_{ij} = 0$ se $i = j$; $d_{ij} = \min\{V(\mu_{ij}) ; \mu_{ij} \in V_{ij}\}$ se $V_{ij} \neq \emptyset$ e $d_{ij} = \infty$ se $V_{ij} = \emptyset$.

Dada a matriz de distâncias, uma *mediana* ou *centróide* em um grafo $G = (V,E)$ é um vértice para o qual a soma das distâncias aos demais vértices é mínima em relação a V e uma p -*mediana* $M \subset V$ é um conjunto de p vértices tal que a soma das distâncias de algum $v \in M$ para todo $y \in V - M$ é mínima.

3. Problema das p-medianas

Seja $G = (V,E)$ um grafo não orientado. O *problema das p-medianas* consiste em encontrar um conjunto de vértices $V_p \subset V$ tal que V_p é o conjunto das medianas do problema com cardinalidade p , tal que a soma das distâncias de cada vértice pertencente a V até seu vértice em V_p seja mínima.

A formulação deste problema como um modelo de Programação linear inteira 0-1 pode ser expressa por:

$$V_p = \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} X_{ij} \quad (1)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^n X_{ij} = 1; j \in N \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ii} = p \quad (3)$$

$$X_{ij} \leq X_{ii} ; i, j \in N \quad (4)$$

$$X_{ij} \in \{0, 1\}; i, j \in N \quad (5)$$

onde

$(d_{ij})_{n \times n}$ é uma matriz simétrica de distância com $d_{ij} = 0, \forall i$;

$(X_{ij})_{n \times n}$ é a matriz de alocação, com $x_{ij} = 1$ se o vértice i é alocado ao vértice j , e $x_{ij}=0$, caso contrário;

$x_{ii} = 1$ se o vértice i for uma mediana, e $x_{ii} = 0$ em caso contrário;

p é o número de facilidades (medianas) a serem localizadas;

n é o número de vértices e $N = \{1, \dots, n\}$.

4. Problema proposto

4.1. Área objeto do estudo

Foram analisados mapas da Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro e mapas em formato digital, obtidos através dos aplicativos *Google Earth* e *Google Maps* [Google] de uma área previamente delimitada na região leopoldinense do subúrbio carioca, entre as linhas da Central e a avenida Brasil. O primeiro objetivo foi identificar áreas públicas ou privadas em mau estado de conservação ou inutilizadas, porém passíveis de desapropriação por interesse público para a construção de unidades de lazer. Dentre as áreas encontradas estão, entre outras, parques, bosques, praças e jardins. A análise dessas áreas para fins de inclusão no estudo procurou levar em conta possíveis limitantes físicos como favelas, rios, canais, topografia acidentada etc..

A distribuição destas áreas não é uniforme, tanto em relação a áreas verdes como a unidades de serviço como postos médicos de pronto atendimento, postos policiais, unidades avançadas do corpo de bombeiros etc. As áreas verdes sob responsabilidade da prefeitura, com exceção do Jardim do Méier, estão com baixo nível de conservação. Na região fronteira do Estádio João Havelange não foi encontrada nenhuma área pública candidata a nossa análise, embora existam dezenas de outras áreas suscetíveis para esta finalidade. Prosseguindo com a análise encontramos em certos locais, áreas muito próximas entre si, que em uma primeira avaliação seriam descartadas, mantendo-se somente aquelas que teriam no mínimo uma distância previamente determinada entre si.

4.2. Metodologia adotada

O estudo envolveu um modelo de grafo, sobre o qual foi feita uma aplicação do problema das p-medianas, visando a escolha de áreas para melhoramento. Em seguida, foi feita uma avaliação da cobertura total oferecida pelas áreas escolhidas, em relação às perspectivas de demanda da população, por serviços dentro de uma distância limite. Finalmente, as áreas escolhidas foram submetidas a uma avaliação qualitativa, usando-se a metodologia do mapa conceitual.

Para a identificação das áreas passíveis de alocação de unidades de lazer, procurou-se inicialmente obter mapas no setor de urbanismo da Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro, o Instituto Pereira Passos. No entanto estes mapas datam de 1999 e significativas mudanças ocorreram desde então. Em vista disso, utilizamos também mapas do *Google Earth*, com a superposição de imagens de satélite e foi observado que algumas áreas identificadas como “áreas verdes” já haviam sido ocupadas, principalmente pelas favelas vizinhas.

Foram construídos polígonos delimitadores das áreas encontradas, representando-se cada área pelo centro de gravidade do polígono correspondente (vértice), o que estabelece pontos para cálculo de distâncias. No grafo representativo do conjunto, existirá uma aresta ligando dois vértices se as áreas correspondentes forem fronteiriças, o que o caracteriza como um grafo planar. As unidades de lazer visam atender à população em geral e um modelo de grafo planar garantirá aos pedestres um deslocamento de ida e volta até a unidade de lazer pelo mesmo itinerário. Os vértices e as arestas do grafo estão representados sobre o mapa da área, na Figura 1 a seguir.

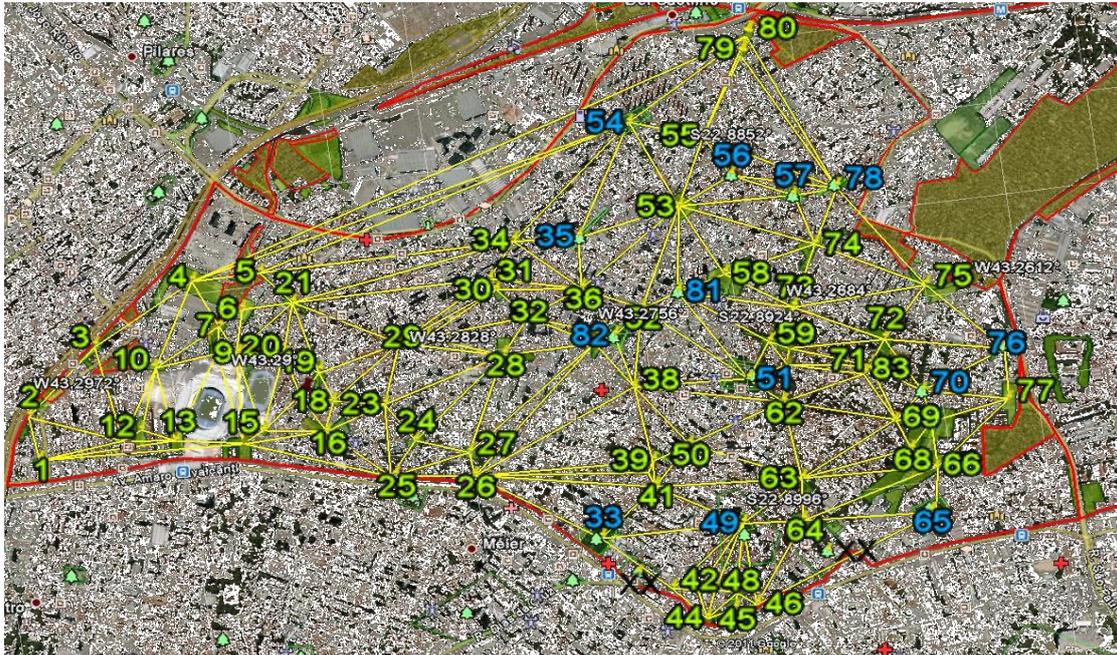


Figura 1: Áreas adjacentes e grafo

Os limitantes físicos estão representados por linhas vermelhas, as unidades de lazer existentes numeradas com cor azul, as áreas possíveis de desapropriação ou reaproveitamento numeradas com cor verde e as arestas em amarelo. O grafo possui duas componentes conexas, uma com 83 e outra com 18 vértices, esta última tendo sido excluída deste estudo. O grafo planar G correspondente à componente estudada está na Figura 2 abaixo.

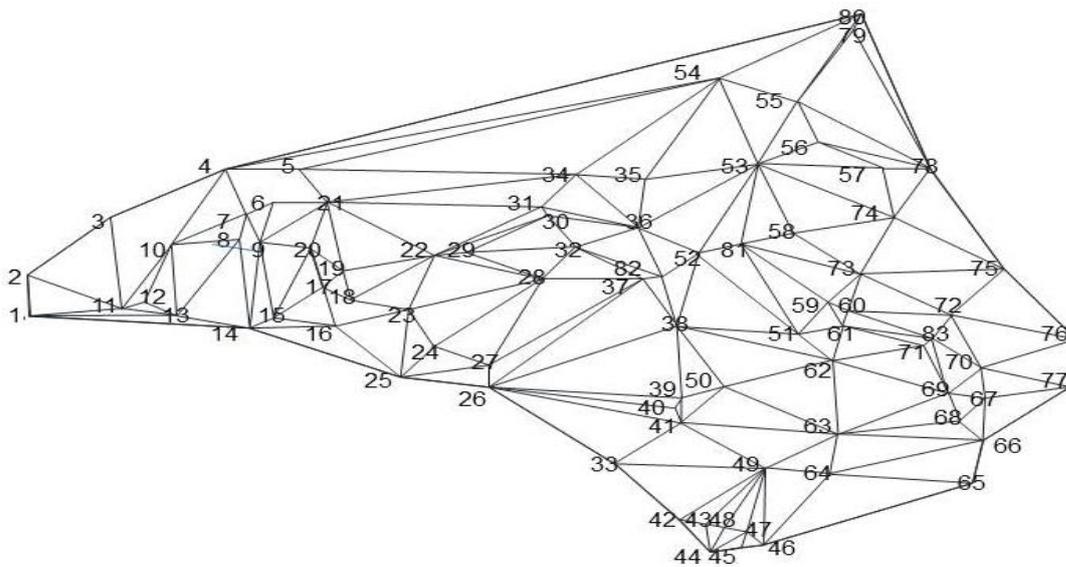


Figura 2: Grafo das áreas disponíveis e suas conexões

Determinamos a distância entre cada par de vértices, como a distância real percorrida (d_R) dada por $d_R = \alpha \cdot d_E$ (6), onde d_E é a distância euclidiana, em metros, entre os dois vértices e α é o coeficiente de correção que aproxima a distância euclidiana para d_R , Rosário *et al* (2002), considerando a latitude e a longitude de cada vértice. Neste trabalho, α será considerado igual a 1,2. Esses valores foram calculados através de funções na linguagem APL2, Brown (1992) e Thomson & Polivka (1995). A Tabela 1 a seguir é a lista de adjacência do grafo, cujas arestas foram valoradas como descrito acima.

Como exemplo de consulta, os vértices 2 e 3 ficam a 323 metros um do outro e os vértices 3 e 4, a 948 metros.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Tabela 1: Lista de adjacência e distâncias

V	Vértices adjacentes	Distâncias	V	Vértices adjacentes	Distâncias
1	2 12 13 15	243 537 703 1144	43	44 48 49	149 86 428
2	3 12	323 564	44	45 47 48	159 203 145
3	4	948	45	46 47	101 85
4	5 7 54 80	358 271 1736 3101	46	47 49 64 65	120 427 503 1019
5	21 34 54	206 1284 1403	47	49	357
6	7 9 21	153 231 248	48	49	382
7	8 9 10	123 174 410	49	63 64	889 302
8	9 10 13 14	300 319 515 523	50	62 63	526 691
9	14 15 20 21	490 420 212 370	51	52 59 61 62 81	638 216 203 209 566
10	11 12 13	396 317 375	52	53 81 82	576 203 194
11	12 13	107 279	53	54 55 56 57 58 74 81	966 384 310 571 412 701 450
12	13	191	54	55 80	1026 1365
13	14	313	55	79 80	492 603
14	15 16	150 451	56	57 78	324 513
15	16 17 20	317 287 411	57	74 78	274 211
16	17 18 23 25	232 164 337 390	58	73 74	390 483
17	18 19 20	158 136 216	59	60 61 63	92 149 1328
18	19 22 23	154 451 267	60	61 71 72 73	86 436 477 225
19	21 22	400 422	61	62 71 83	188 427 392
20	21	282	62	63 69 83	1217 577 432
21	22 31 34	568 1009 1170	63	64 66 68 69	1188 1859 1753 1719
22	28 29 30 31	568 158 574 579	64	65 66	643 721
23	24 28	233 677	65	66	217
24	25 27 28	224 287 655	66	67 68 77	248 153 526
25	26 27	432 426	67	66 68 69 70 77	248 200 196 165 387
26	27 37 38 39 40 41	115 917 927 897 872 899	68	69	170
27	28 37	544 854	69	70 71 83	200 310 285
28	29 32 37	420 228 438	70	76 77	461 432
29	30 32	426 515	71	72 83	133 61
30	31 32 36	71 204 429	72	75 76	375 604
31	34 36	237 464	73	74 75	342 670
32	36 37 82	316 367 447	74	75 78	591 323
33	41 42 49	418 483 762	75	76 78	496 687
34	35 36 54	356 419 528	76	77	270
35	36 53 54	273 512 647	77		
36	52 53 82	326 659 294	78	79 80	828 932
37	38 82	292 114	79	80	120
38	39 50 51 52 62 82	392 401 586 408 758 289	80		
39	40 41 50	74 126 210	81		
40	41	61	82		
41	49 50 63	495 286 441	83		
42	43 44 49	116 210 515			

5. A heurística

No presente estudo, consideraremos s como o número de sítios disponíveis para a reforma ou construção de unidades de lazer. Dentre os 83 locais disponíveis encontrados, especificar o valor p associado ao modelo de medianas depende da disponibilidade de recursos e do interesse do poder público. Optamos por tomar um valor de p suficientemente grande ($p = 40$), de modo que se possa em seguida, caso necessário, descartar alocações feitas pelo

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

critério de p-medianas, mas que não sejam adequadas por critérios qualitativos. Esta opção, relacionada ao tamanho do problema, descarta a enumeração total e abre caminho para o uso de uma heurística.

A matriz de distâncias foi calculada pelo algoritmo de Floyd com matriz de roteamento, Boaventura e Jurkiewicz (2009) , implementado na linguagem APL2, com alguns mecanismos de verificação inicial. Foi utilizado um computador com processador Intel Core i5 e 4Gb de memória RAM. A execução exigiu pouco menos de 12 segundos. A matriz de distâncias deixa de ser apresentada em vista do espaço exigido.

A matriz obtida serve então como argumento para a heurística de seleção de vértices, juntamente com o valor de $p = 40$ anteriormente estabelecido. Foi utilizada a heurística apresentada em Pearl (1984) que se mostrou bastante eficiente, obtendo-se resultados em aproximadamente 2 segundos. Apresentamos a heurística utilizada a seguir.

```
Obter Matriz de Distâncias (Algoritmo de Floyd) M
VVA<-Vetor de vértices alocados
VVAUX<-VVA
Rotina1-mediana N vezes
IN<-1
ALOC<-vazio
L2: V<-0
J<-1
L1: I<-1
LO: V(J) <-V(J)+M(I;J)
Faça i<-i+1
Se i<= (Número de linhas de linhas de M) vá para LO
Faça J<-J+1
Se J <= (Número de colunas de M) vá para L1
Concatenar ALOC com a coluna onde ocorre o menor de V
Retira a linha e a coluna de M onde foi encontrado o menor
Retira de VVAUXa posição onde ocorre o menor de V
IN<-IN + 1
Se IN <= N vá para L2
Imprime ALOC
```

A execução desta heurística resultou nos seguintes vértices, preservando a ordem de alocação:

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

82 36 52 32 39 28 40 41 30 50 81 31 26 34 51 27 35 62 29 23 61 24 22 60 53 2559
49 18 16 83 19 73 17 71 33 58 21 64 15.

A Tabela 2 a seguir sumariza os dados para estas 40 locações.

Tabela 2: Dados sobre as 40 locações obtidas

V	PR	NOME	LAT	LON	F	A
82	U	Pça. Avai	22,89237	43,27672	R	4435
36	P	A34	22,89039	43,27769	R	2339
81	U	Pça. Orlando Silva	22,89104	43,27409	R	1590
52	P	A49	22,89154	43,27553	R	1561
51	U	Pça. Aparecida	22,89469	43,27193	R	1319
30	P	A30	22,89013	43,28089	R	2496
35	U	Pça. Canuto B.Filho	22,88838	43,27731	R	2017
39	P	A37	22,89743	43,27603	R	1311
40	P	A38	22,89793	43,27626	R	1313
27	P	A27	22,89627	43,28281	R	3718
34	P	A33	22,88824	43,27998	R	2790
32	P	A32	22,89128	43,27989	R	1113
53	U	A50	22,88771	43,27353	R	7118
49	U	A47	22,90031	43,27296	R	3171
24	P	A24	22,89553	43,28483	R	2526
31	P	A31	22,88963	43,28108	R	1080
28	P	A28	22,89272	43,2808	I	9366
33	U	Jardim do Méier	22,90018	43,27867	R	11641
60	P	A54	22,89373	43,27036	R	1896
29	P	A29	22,89159	43,28374	R	1155
41	P	A39	22,89837	43,27612	I	4314
54	U	Pça. Manet	22,88428	43,27991	R	9141
73	P	A65	22,89214	43,28983	R	3255
23	P	A23	22,89402	43,28571	R	898
50	P	A48	22,89692	43,27454	I	3457
22	P	A22	22,89166	43,28492	R	645
61	P	A55	22,89438	43,27043	R	587
83	P	A71	22,89511	43,26759	R	1297
25	P	A25	22,89676	43,28597	R	600
26	P	A26	22,89713	43,28275	R	1197
21	P	A56	22,89575	43,27072	I	2726
71	P	A63	22,89479	43,26726	R	647
16	P	A16	22,89478	43,28812	I	11816
59	P	A53	22,89339	43,27096	I	3776
58	P	A52	22,89053	43,27227	I	16546
18	P	A18	22,89363	43,28767	I	1777
19	P	A19	22,89252	43,28797	I	2563
64	P	A58	22,90050	43,87070	I	9030
21	P	A21	22,88959	43,28865	I	3016
17	P	A17	22,89316	43,28875	I	744

Legenda: V=Vértice; LAT=Latitude; LON=Longitude; F=Forma; R=Regular; I=Irregular; A=Área; PR=Propriedade; U=Pública; P=Privada.

Uma crítica à solução acima apresentada é que uma região de aproximadamente 2 km² na região vizinha ao Estádio João Havelange não teve nenhum vértice alocado, o que resultará em uma baixa cobertura total da área e grande superposição na área central. Isto se deve às grandes distâncias nas proximidades do Estádio e na grande proximidade da outra área mencionada.

Um mapa conceitual Cardoso *et al* (2012), Novak e Cañas (2008), Sowa (1983), dos requisitos necessários para a alocação de um vértice a uma unidade de lazer e reclassificação dentro da tipologia do tema pode ser construído. Trata-se de um grafo, do qual, por falta de espaço, apresentamos apenas o subgrafo correspondente à alocação de uma propriedade pública a uma praça (Figura 3)

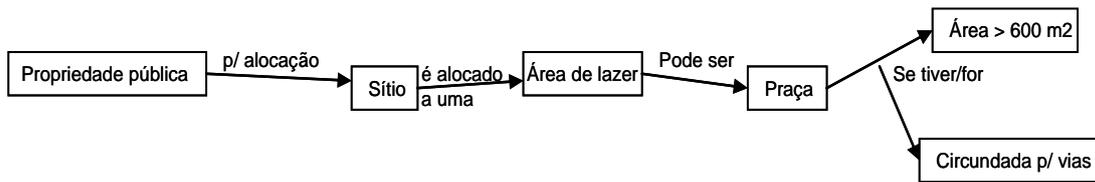


Figura 3 – Trecho de mapa conceitual para destinação de sítio

Por exemplo, em relação ao vértice 36 temos os seguintes atributos: forma regular (ou seja, bem definida, o que é uma exigência básica), propriedade particular, área de 2339 m² (>600 m²) e circundado por vias. Estas características nos levam a alocar uma praça àquele sítio.

Outro aspecto da análise do problema seria obter a máxima cobertura para os vértices, utilizando o conceito de vizinhança, com o mínimo custo possível, ou seja, com o menor número possível de unidades de lazer. Um raio de vizinhança menor envolve um maior custo, porque serão necessárias mais unidades para que se obtenha a cobertura total. Analisando a região em estudo, foi possível observar que, ao se considerar um raio de 500 m em torno de cada unidade de lazer, será possível cobrir todos os vértices do grafo. Do ponto de vista dos usuários, esta será a maior distância a ser percorrida até a área de lazer mais próxima, dentro da área de cobertura geral. A Figura 4 mostra os gráficos que relacionam a cobertura e o custo em relação ao número de unidades de lazer no grafo original.

Para minimizar o problema da concentração de vértices citado no item 4.1, foram eliminados alguns sítios, por critérios urbanísticos de forma e área, os quais foram excluídos da matriz de distâncias encontrada pelo algoritmo de Floyd. Aplicando novamente a heurística, se obtém 40 vértices dos quais foram selecionados 32, levando-se em conta os dados apresentados na Tabela 2 e o mapa conceitual da Figura 3.

Uma cobertura para esses 32 vértices, formada com raio de 500 m (levando-se em consideração a relação cobertura/custo), é bastante satisfatória, conforme a Figura 4.

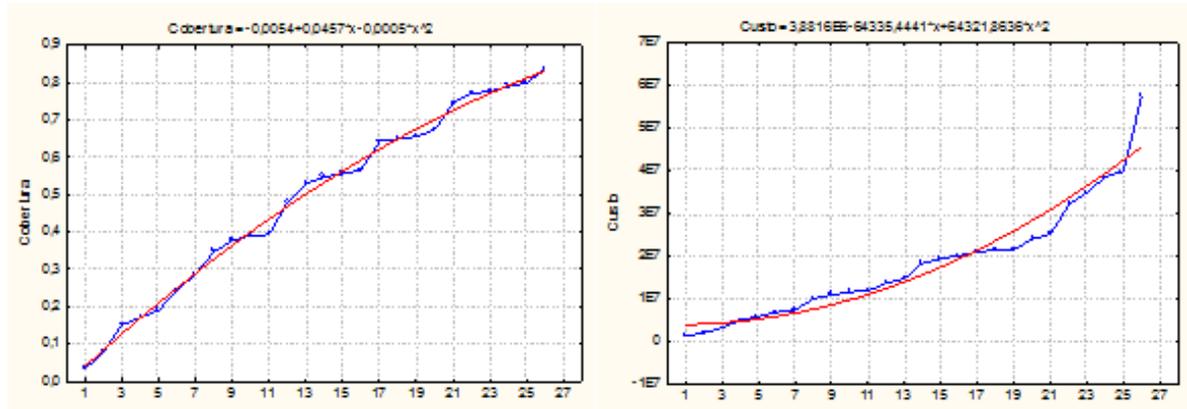


Figura 4: Cobertura e custo em relação ao número de unidades

6. Conclusões e trabalhos futuros

O presente estudo foi dedicado à procura das melhores localizações para construção ou reforma de espaços públicos de lazer na região em estudo, através do problema das p-medianas. Trata-se de uma região que tem estado bastante longe da visão do poder público, o que acumulou grande número de problemas relacionados com a qualidade de vida da população. A alocação de áreas de lazer nesse espaço pode contribuir significativamente para a melhoria dessa situação, sobretudo no presente, quando a retomada de áreas de alta densidade de população pela autoridade pública abre perspectivas para mudanças positivas na situação vigente. Acreditamos que a metodologia aqui apresentada possa ser reutilizada no futuro, com novos dados decorrentes das novas situações.

A participação dos *stakeholders* envolvidos – prefeitura e seus departamentos, estado, população envolvida, associações de moradores e profissionais de diversas áreas – tem grande importância nos processos de decisão do tipo aqui discutido. O uso de audiências públicas e da obtenção de um conjunto de soluções para exame por critérios qualitativos, eventualmente com a aplicação de técnicas da chamada *PO Soft*, seria uma contribuição importante. Para estudos futuros propõe-se, nesse contexto, a utilização de

metodologias de consenso como, por exemplo, *ISM - Interpretive Structural Modelling*, Warfield (1994), incluindo na análise todas as áreas citadas neste trabalho objetivando alocar, além das unidades de lazer, unidades de serviço como postos avançados de bombeiros, postos de pronto atendimento de saúde e unidades policiais.

Referências

- Alekseeva, E.; Kochetov, Y.; Plyasunov, A. (2008). *Complexity of local search for the p-median problem*. European Journal of Operational Research.191(3), 736-752.
- Avella, P.; Boccia, M.; Salerno, S.; Vasilyev, I. (2012). *An aggregation heuristic for large scale p-median problem*.Computers & Operations Research 39(7), 1625-1632.
- Boaventura Netto, P.O.; Jurkiewicz, S. (2009). *Grafos: introdução e prática*. Blucher, São Paulo.
- Brimberg, J.; Drezner, Z. (2013). *A new heuristic for solving the p-median problem in the plane*. Computers and Operations Research 40(1), 427-437.
- Brown, J. (1992). *APL2*. Philadelphia: Wiley.
- Cardoso, M. M, Gonçalves, T. M. e Scarpel, R. A.(2012). *Utilização de mapas conceituais para elaboração de conteúdo da disciplina de gerenciamento de riscos*. Congresso Nacional de Excelência em Gestão.
- Chiyoshi, F.Y.; Galvão, R.D. (2000). *A statistical analysis of simulated annealing applied to the p-median problem*. Annals of Operations Research, v. 96, 61-74.
- Daskin, M. (1995). *Network and Discrete Location: Models, Algorithms, and Applications*. Wiley Interscience, NY.
- Drezner, Z. (1995). *Facility Location: A survey of Applications and Methods*. Springer-Verlag, NY.
- Garey, M.R.; Johnson, D.S. (1979). *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness*. WH Freeman and Co., San Francisco.
- Goldengorin, B.; Krushinsky, D. (2011). *Complexity evaluation of benchmark instances for the p-median problem*. Mathematical and Computer Modelling, 53(9), 1719-1736.
- Google. Disponível em: < <http://www.google.com>. (s.d.) >.Acesso em 20/08/2011.
- Hakimi, S.L. (1964). *Optimum distribution of switching centers and the medians of a graph*. Operations Research, 12, 450-459.
- Hakimi, S.L. (1965). *Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems*. Operations Research, 13, 462-475.

- Lorena, L.A.N.; Senne, E.L.F.; Paiva, J.A.C.; Marcondes, S.P.B. (2001). *Integração de modelos de localização a sistemas de informações geográficas*. In: Revista do Departamento de Engenharia de Produção. São Paulo: Universidade Federal de São Carlos, v.8, n.2.
- Mládenović, N.; Brimberg, J.; Hansen, P.; Moreno-Pérez, J.A. (2007). *The p-median problem: a survey of metaheuristic approaches*. European Journal of Operational Research 179, 927-939.
- Novak, J. D. e Cañas, A. J. (2008). *The theory underlying concept maps and how to construct and use them*, Technical Report IHMC CmapTools 2006-01 Rev 01-2008, Florida Institute for Human and Machine Cognition, 2008, Disponível em:
<http://cmap.ihmc.us/Publications/ResearchPapers/TheoryUnderlyingConceptMaps.pdf>
- Pearl, P. (1984). *Heuristics: Intelligent Search for Computer Problem Solving*. New York: Addison-Wesley.
- Rosário, R.R.L.; Carnieri, C.; Steiner, M.T.A. (2002). *Proposta de solução para o problema das p-medianas na localização de unidades de saúde 24 horas*. In: XXII ENEGEP, Curitiba. Anais do XXII ENEGEP, v. único.
- SOWA, J. (1983). *Conceptual Structures: Information Processing in Mind and Machine*. Addison-Wesley.
- Thomson, N.D.; Polivka, R.P. (1995). *APL2 in Depth*. Poughkeepsie. Springer-Verlag.
- Warfield, J. N. (1994). *A Science of Generic Design – Managing Complexity Through Systems Design*. Iowa State University Press.
- Werneck, R.F.; Resende, M.G.C. (2004). *A hybrid heuristic for the p-median problem*. Journal of Heuristics, 10, 59-88.