SOBRAPO

PODes
Revista Eletrônica Pesquisa Operacional
para o Desenvolvimento

Rio de Janeiro, v.5, n.2, p. 113-135, maio a agosto de 2013

ALGORITMO PARA SELEÇÃO DISCRETA DE LOTES DE ATIVOS COM BASE EM BUSCA TABU

Melquiades Pereira de Lima Junior [a*], Rodrigo Jose Pires Ferreira [b]

[a] *Instituto Federal do Rio Grande do Norte – IFRN, Natal – RN*
[b] *Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, Recife – PE*

Resumo

Um dos problemas fundamentais em finanças é a diversificação de ativos para investimento, nesse campo o modelo de Média-Variância elaborado por Markowitz (1952) busca diferenciar o risco e retorno dos ativos para construção de carteiras de investimento. Apesar da importância de sua contribuição, o método inicial desenvolvido não considera a aquisição em lotes e custos de transação. A partir de uma adaptação do modelo M-V, esse trabalho desenvolveu uma abordagem alternativa de resolução considerando variáveis discretas, para isso foi utilizado o método Busca Tabu, em conjunto com a MIQP - Programação Quadrática Inteira Mista. Para fins de análise, os resultados foram comparados pela própria MIQP isoladamente. Um conjunto de 250 ativos foi dividido em cinco instâncias para testes empíricos, o que levou a demonstração de um bom desempenho computacional, considerando velocidade e aproximação da solução ótima. Por considerar o modelo com solução em formato discreto, é possível o uso em outros tipos de ativos financeiros e reais.

Palavaras-Chave: Alocação de Ativos. Markowitz. Busca Tabu.

Abstract

A fundamental problem in finance is the diversification of assets for investment, the Mean-Variance model developed by Markowitz (1952) seeks to differentiate the risk and return on assets for the construction of investment portfolios. Despite the importance of their contribution, the initial method developed does not consider the acquisition in lots and transaction costs. From an adaptation of the MV model, this work developed an alternative approach to solve the problem considering discrete variables, was used to solve the Tabu Search method, together with MIQP - Mixed Integer Quadratic Programming. For analysis purposes, the results were compared by MIQP alone. A set of 250 assets was divided into five instances to empirical tests, which led to a demonstration of good computational performance, considering speed and optimal solution. Considering the model with discrete solution format, you can use in other types of financial and real assets.

Keywords: Asset Allocation. Markowitz. Tabu Search.

***Autor para correspondência:** e-mail: melquiades.pereira@gmail.com

Versão inicial submetida em 16/02/2012. Versão final recebida em 09/02/2013.

1. Introdução

A evolução do mercado financeiro nas últimas décadas reforça a reestruturação do sistema financeiro global como forma de crescimento em longo prazo e do equilíbrio do agregado financeiro. Em contribuição ao desenvolvimento e à competitividade dos mercados, países emergentes como Brasil, China, Índia e África do Sul, denominados de BRICS, são considerados como fontes potenciais de recursos e de investimentos. (OECD, 2010). Para aproveitar essas oportunidades, uma das metodologias é a formação de portfólios de ativos.

O estudo acerca da diversificação de investimentos e construção de carteiras é um problema matemático de apoio à tomada de decisão de investidores e captadores de recursos de forma a contribuir com a redução do risco do investidor em favor de determinado retorno. A evolução científica da Moderna Teoria de Carteiras culminou na construção de outros modelos e na forma de análise e mensuração do risco pelo mercado.

Elton e Gruber (2004), mediante estudo sobre a evolução histórica, afirmam que esses modelos adquiriram grande repercussão e complexidade por meio da utilização de métodos matemáticos e computacionais que contribuem para a resolução e aplicação da moderna teoria de carteiras de investimentos.

As pesquisas no campo se dedicam à modelagem matemática da diversificação como demonstrado por Speranza (1996), Mansini e Speranza (1999), Mansini et al (2003) e Dias (2009), como também aos métodos de estimativa de retornos e das variâncias dos ativos como em Albuquerque (2009) e Ferreira et al (2009), sempre com o propósito de obter uma medição mais precisa dos retornos e da volatilidade das carteiras de investimentos.

Com base no estudo realizado por Di Gaspero et al (2007), este trabalho teve como objetivo elaborar um algoritmo utilizando o método de Busca Tabu, como apoio à resolução do modelo Markowitz (1952) de Média - Variância para seleção de portfólio de investimentos, aplicado no mercado financeiro brasileiro. O estudo adapta o modelo clássico com a utilização de variáveis discretas, levando em consideração a aquisição por lotes e custos de transação na Bolsa de Valores de São Paulo.

Vale salientar que o modelo M-V tem a capacidade de ser utilizado mesmo relaxando pressupostos de normalidade dos retornos ou da função de utilidade quadrática (Markowitz, 1952; Elton; Gruber, 2004). Pesquisas que se propuseram comparar modelos desenvolvidos com o modelo clássico de Média-Variância confirmam a robustez por meio de testes empíricos. Alguns desses casos são Cohen e Pogue (1967), Levy e Kroll (1976), Konno (1990), Konno e Yamazaki (1991), Pástor (2000) e Alexander e Baptista (2000).

Este documento está organizado em 4 (quatro) partes. Após a introdução, a segunda parte traz uma revisão da literatura nos assuntos que envolvem problemas de seleção de ativos financeiros para investimento. Em seguida, na seção três, é detalhado o algoritmo utilizado para solucionar o problema proposto de forma heurística, assim como a adaptação que se fez necessária para sua aplicação ao modelo utilizado de forma discreta. Por fim, na quarta seção, são colocadas as conclusões do estudo desenvolvido.

2. Referencial Teórico

2.1. Descrição do Problema de Seleção de Ativos

O modelo de construção de carteiras inicia com a seleção de coeficientes para inputs na estrutura proposta por Markowitz (1952). Dentre as variáveis de entrada pode-se numerar a modelagem dos retornos, a covariância entre os ativos e as restrições de mercado. Outro aspecto e de mais difícil definição para o uso de uma solução discreta é o método de resolução, o qual consiste em buscar o menor risco a um determinado retorno.

Tobin (1958) descrevem a forma de cálculo da taxa de retorno de um ativo em determinado momento e periodicidade (dia, mês, ano, etc.) como sendo o percentual de variação de seu preço entre dois períodos de tempo. Conforme demonstrado na Equação 1, o retorno R_i do ativo é consequência da relação entre o preço do ativo no momento n dado por y_n e o preço no momento anterior dado por y_{n-1}. Sem levar em consideração a distribuição de dividendos.

$$R_i = \frac{y_n - y_{n-1}}{y_{n-1}} = \frac{y_n}{y_{n-1}} - 1 \qquad (1)$$

Para fins de tratamento, segundo Fama (1965), é mais adequada à utilização de retornos do que de preços, já que os retornos favorecem o tratamento estatístico. A Equação 2, define o retorno composto continuamente ou simplesmente logaritmo do retorno r_i.

$$r_i = \log(1 + R_i) = \log\left(\frac{y_n}{y_{n-1}}\right) = [\log y_n - \log y_{n-1}] \qquad (2)$$

Após quantificar os retornos históricos o objetivo do portfólio é analisar o retorno futuro com base em uma esperança de preço y_t em um momento futuro t. Um ativo possui um retorno bruto que pode ser denominado por R_i em percentual, onde essa variável pode ser classificada por um vetor de retornos de um ativo i com um número finito de possibilidades: $R_{1i}, R_{2i}, \dots, R_{ti}$.

Por desconhecer as probabilidades exatas dos retornos esperados, Markowitz (1952) propõe a utilização do método de Cenários Equiprováveis, no qual todos os retornos possuem igual probabilidade. Em outras palavras, a esperança do retorno dos ativos é igual média de seus retornos históricos.

O usuário também pode buscar outros métodos de estimativa de retornos, um desses casos é o uso da média geométrica por Modigliani e Pogue (1973). O retorno futuro do ativo é igual a uma média geométrica de seus retornos históricos, conforme ilustra a Equação 3, e que esses retornos são defasados pelo coeficiente k. Esse trabalho foi o início da utilização de outros métodos de estimação de retornos por meio de séries históricas.

$$R_i[k] = \prod_{j=1}^{k}(1 + R_i)^{\frac{1}{k}} - 1 \tag{3}$$

Outra alternativa para estimação dos retornos são os modelos de equilíbrio. O desenvolvimento das teorias de equilíbrio fornecem modelos de precificação, por Sharpe (1964) denominada de CAPM Capital Asset Pricing Model. O modelo CAPM tradicional é descrito na Equação 4.

$$E(R)_i = \overline{R_i} = R_f + \beta(\overline{R}_m - R_f) \tag{4}$$

A estrutura do CAPM apresentada descreve a expectativa do retorno $E(R)_i$ representada por $\overline{R_i}$ composta pelo retorno do ativo em um momento anterior R_f, o retorno esperado do mercado $\overline{R}_m$ ou índice de mercado e o beta do ativo em relação ao mercado β. Esse coeficiente beta demonstra o coeficiente angular da reta mencionada.

A mensuração do risco pela covariância indica que dois ativos podem minimizar o risco de um investimento em função da combinação entre os mesmos. Dois ativos para reduzir o risco da carteira devem representar dois mercados que não estão diretamente relacionados. A covariância e a correlação entre dois ativos R_i e R_j são expressas pelas Equações 5 e 6 respectivamente (Tsai, 2005).

$$\mathrm{COV}\left[E(R_i), E(R_j)\right] = \sigma_{ij} = E\left[(R_i - \overline{R_i})\left(R_j - \overline{R_j}\right)\right] \tag{5}$$

2.1.1 Modelo Markowitz Discreto

O modelo visa minimizar o risco do investidor, o retorno, a um determinado nível de retorno. O modelo M-V discreto foi utilizado por Chiodi et al (2003), Marques (2007), Di

Gaspero et al (2007), Li e Tsai (2008) e Golmakani e Fazel (2011). No modelo foi elaborado o seguinte problema adaptado aos custos de transação da Bovespa (2011), conforme as Equações 6, 7, 8, 9, 10 e 11.

Minimizar:

$$\sigma_p^2 = \sum_{j \in N} \sum_{j \in N} p_i x_i p_j x_j \sigma_{ij} \tag{6}$$

Sujeito a:

$$[DV \sum_{i=1}^{n} E(R)_i p_i x_i] - [DC \sum_{i=1}^{n} p_i x_i] \geq R_e \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geq \text{Imin} \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq \text{Imax} \tag{9}$$

$$x_i \geq 0 \tag{10}$$

$$i = 1,2, \dots, n, x_i \text{ é inteiro} \tag{11}$$

No modelo apresentado σ_p^2 é a variância do portfólio, calculado por meio da covariância entre os ativos i e j, sendo N o conjunto de ativos candidatos a compor o portfólio e x_i referente às quantidades dos lotes de cada ativo no portfólio, neste caso representado por um número inteiro. Essa representação refere-se à função objetivo, a qual representa o risco do portfólio que deve ser minimizado, determinado pela Equação 6.

Dentre as restrições, a Equação 7 demonstra o retorno mínimo líquido. A esperança do retorno do portfólio deve ser maior que o retorno mínimo exigido pelo investidor e ainda subtraído os custos de transação. No primeiro termo da Equação 7, o somatório de $E(R)_i p_i x_i$ representa o ganho na venda do portfólio no final do período, em que a quantidade x_i de lotes é multiplicada pelo seus respectivos preços p_i e retorno futuro esperado $E(R)_i$. Ainda na formulação $\mathrm{DV} - \mathrm{Despesas\ na\ Venda}$, representa exatamente o percentual de despesas incorridas na venda dos lotes.

O segundo termo $p_i x_i$ da Equação 7, representa o custo de aquisição de cada lote somados e subtraídas as deduções $\mathrm{DC} - \mathrm{Dedução\ na\ Compra}$. As despesas são deduzidas da compra em função do crédito de IR que está embutido nos fatores DV e DC que são especificados no Método de Pesquisa. No último termo o fator R_e trata do retorno mínimo exigido pelo investidor.

As Equações 8 e 9 tratam do somatório do produto das quantidades de cada ativo x_j pelos seus respectivos preços de aquisição, este valor deve ser maior que o valor mínimo e menor que o valor máximo definido pelo investidor. A importância da restrição superior se deve ao fato do coeficiente de correlação σ_{ij} assumir valores positivos e negativos. A quarta restrição, na Equação 10 é a restrição de não negatividade.

2.1.2 Algoritmos para Resolução do Problema

Muitas pesquisas foram desenvolvidas na área de finanças computacionais, com o objetivo de resolver o modelo proposto como Martin (1955), Markowitz (1956) e Wolfe (1959) que pesquisaram métodos de programação quadrática para resolução do modelo M-V. Em função do alto esforço computacional exigido pelos modelos, na década de 90, os métodos buscaram eliminar deficiências e reduzir o tempo de resolução. Pesquisas se dedicaram a propor métodos de resolução dos modelos mais populares como o de Markowitz (1952). Em contrapartida, alguns casos começaram a resolver problemas alternativos como Speranza (1996) que utiliza um modelo alternativo, linear, com o objetivo de propor uma heurística para a resolução adaptado, considerando variáveis discretas.

Mansini e Speranza (1999) também propõem três tipos de heurísticas para resolução do modelo misto inteiro linear, com o objetivo de aumentar a capacidade de busca do modelo para grande população de ativos. O método quadrático pouco explorado em relação ao desenvolvimento de algoritmos combinatórios, principalmente no mercado doméstico.

Posteriormente, muitos estudos se dedicaram a melhorias dos métodos de resolução dos modelos de portfólio na área computacional. O objetivo principal era obter resultados significativos e com o menor esforço computacional, capaz de proporcionar agilidade para a tomada de decisão. Além de métodos tradicionais como programação inteira mista, pesquisadas por Chiodi et al (2003), Bertsimas e Shioda (2009) e Li e Tsai (2008) se dedicaram a aplicações por meio de outros métodos. Fouskakis e Draper (2002), que usam otimização estocástica; Brandt e Santa-Clara (2006) que usam programação dinâmica, como também heurísticas e metaheurísticas aplicadas a diversos modelos adaptados e customizados as realidades dos mercados.

Dentre os estudos baseados em metaheurísticas pode-se destacar Chang et al (2000) que faz comparação entre três métodos, Genetic Algorithms, Tabu Search e Simulated Annealing usando variáveis contínuas. Dentre estes, os algoritmos genéticos foram os que obtiveram melhores resultados para o modelo. Posteriormente, Schaerf (2002) descreveu diferentes métodos de busca local para diversificação de soluções e Crama e Schyns (1999), que usam Simulated Annealing. Outros tipos de algoritmos são usados como Streichert e Yamawaki (2006) que utilizam algoritmos evolucionários, principalmente em abordagens multi-objetiva, considerando redução do risco e maximização do retorno. Golmakani e Fazel (2011), por sua vez, usam o método Particle Swarm Optimization.

Nas pesquisas utilizando algoritmos genéticos: Lai, et al (2006) com modelo para dois estágios, Lin e Liu (2008) com o modelo M-V discreto considerando transação em lotes e lógica fuzzy, Anagnostopoulus e Mamanis (2008) que usam uma abordagem multi-objetiva, Chen et al (2010) com um algoritmo genético específico Genetic Relation Algorithm e Ewald et al (2010) usam para o modelo com variáveis contínuas.

Dentre os estudos comparativos há o de Talebi et al (2010) que comparam Genetic Algorithms com Particle Swarm Optimization. Como também Gilli e Schumann (2010) desenvolveram uma grande pesquisa com quatro abordagens Genetic Algorithms, Particle Swarm, Tabu search e Simulated Annealing. Todas as pesquisas em geral no campo de seleção ótima de portfólios de investimentos.

Nesta análise, foi possível constatar a necessidade de aprimoramento dos modelos, por meio de método de soluções híbridos que estão ganhando destaque na literatura. Um exemplo recente da aplicação de modelos híbridos é Di Gaspero, et al (2007) que usa três modelos de busca local, incluindo busca tabu em conjunto com um método de programação quadrática. Esse trabalho consistiu em testes para oito diferentes instâncias, em diferentes mercados, considerando as instâncias de Chang et al (2000), porém não considera variáveis discretas.

3. Abordagem Proposta

3.1 Solução Inicial

A representação da solução foi baseada em um vetor de soluções inteiras no qual cada unidade representa a quantidade x de lotes adquiridos do ativo i, conforme Figura 1.

Ativo	1	2	3	4	...	i
Quantidade	3	0	5	2	...	x

Figura 1 – Representação do Vetor de Soluções Inteiras
Fonte: Elaboração própria.

A heurística construtiva foi realizada com base em Mansini e Speranza (1999) que propõem uma heurística resolvendo uma amostra dos ativos com melhor coeficiente ρ calculado pelo Risco σ_i (desvio padrão do ativo) sobre Retorno do período $E(R)_i$. O percentual de ativos, representado por π, selecionados nesse ranking depende do número de ativos contidos na instância utilizada. A Figura 2 apresenta a heurística.

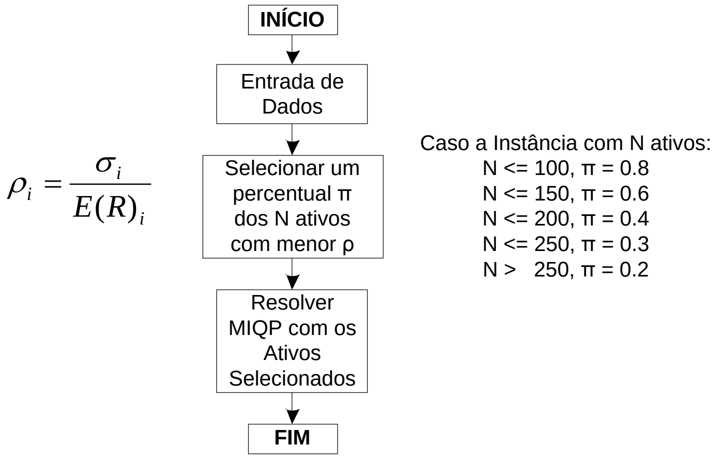

Figura 2 – Heurística Construtiva
Fonte: Elaboração própria.

Como exemplo, para uma instância de $N = 100$ ativos é selecionada uma amostra contendo 80% dos melhores ativos e assim sucessivamente. Quanto maior a quantidade da população menor o percentual da amostra extraído. Após a seleção o problema é resolvido pelo método exato de programação quadrática, montando uma solução inicial. A resolução de uma primeira solução deve satisfazer aos critérios de orçamento e de retorno mínimo exigido pelo investidor.

3.2 Busca Tabu para Troca de Ativos

O método de Busca Tabu, por Glover (1986) e Hansen (1986), é um método interativo para solução de problemas na área de otimização combinatória que aceita o uso de movimentos que prejudicam a função objetivo como forma de escapar de ótimos locais.

O processo inicia com uma solução inicial S_0 que explora iterações com movimentos dentro de um subconjunto V de vizinhança $N(s)$ e solução corrente S. A melhor solução S'

pertencente à V expressa a melhor solução seguindo o critério da função objetivo $f(.)$. Para continuidade do algoritmo, toma-se S' como uma solução corrente mesmo que essa seja pior que S. O critério de escolha do melhor vizinho é utilizado para escapar de ótimos locais o que, por sua vez, ajuda a buscar por ótimos globais.

Para evitar que o algoritmo retorne às soluções já percorridas, utiliza-se um mecanismo de memória de curto prazo denominado de Lista Tabu. A memória consiste em um mecanismo de armazenamento de movimentos que retornem o algoritmo aos espaços de busca já percorridos. Outras adaptações do algoritmo são realizadas de acordo com o problema a ser resolvido. Nesse trabalho, o algoritmo foi adaptado de forma que considere três tipos de movimentos de busca. A Busca Tabu desenvolvida e demonstrada na Figura 3 foi elaborada com base em Schaerf (2002) que compara três métodos de busca local para os modelos de seleção de portfólios.

O método com melhor desempenho encontrado por Schaerf (2002) foi idR – Increase, Decrease e Replace que consiste exatamente na transferência, redução e aumento da quantidade de lotes dos ativos para alteração da solução. No caso estudado foi fixada uma unidade para cada movimento. A partir dos algoritmos de busca tabu aplicados em modelos financeiros foi possível desenvolver uma abordagem própria para resolução. Os trabalhos de Chang et al (2000), Di Gaspero et al (2007) e Gilli e Schumann (2010), que utilizam variáveis contínuas, ajudaram no desenvolvimento do algoritmo proposto e descrito na Figura 3.

O algoritmo consiste na utilização e exploração do espaço de busca por meio de uma vizinhança constituída de três tipos de movimentos, substituição, acréscimo e decréscimo da quantidade de lotes, para cada combinação de ativo i com ativo j. Em particular, foi criada uma lista tabu para cada tipo de movimento: LTT Lista Tabu de Troca que consiste em movimentos de troca proibidos; LTA Lista Tabu de Acréscimo, que consiste em movimentos de acréscimo proibidos; e LTR que consiste em movimentos de redução proibidos. A aspiração dos movimentos nas listas tabu ocorre após a inserção de novos movimentos. Por fim, a melhor solução encontrada na vizinhança é avaliada. O critério de parada foi definido como a quantidade de três loops sem melhoria, o que se tornou suficiente para boas soluções.

O algoritmo foi desenvolvido e executado pelo *Matlab*® com consulta a biblioteca do software Cplex® para execução do método exato. Vale salientar, que a integração entre as ferramentas ocorreu de forma satisfatória.

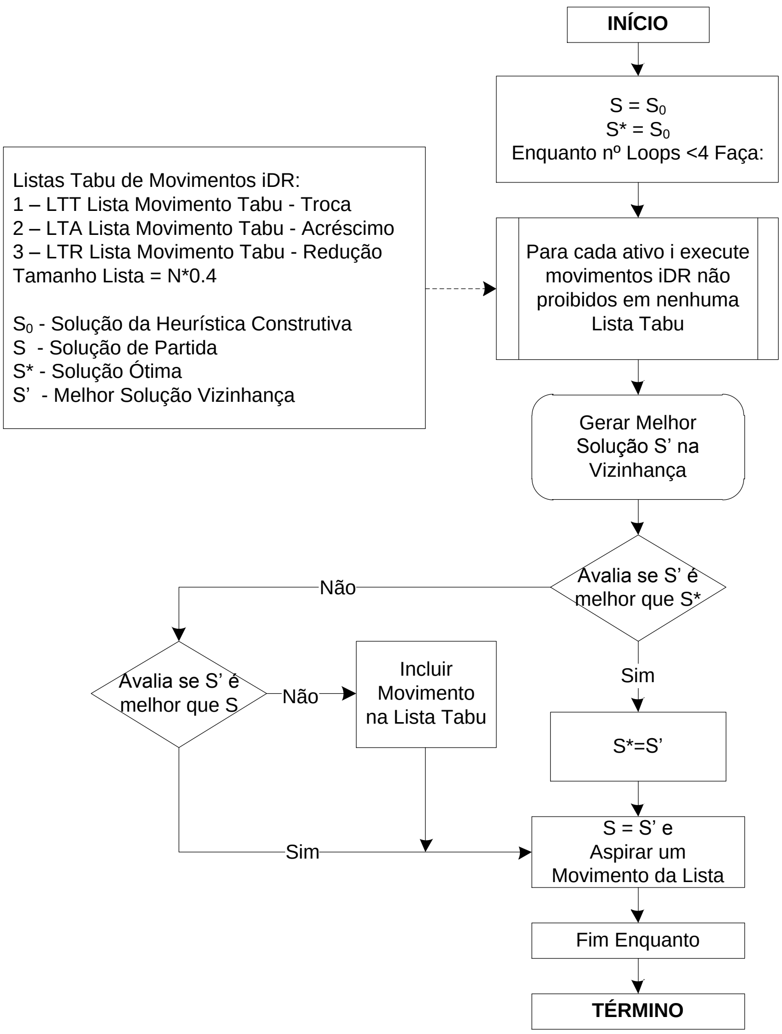

Figura 3 – Busca Tabu

3.3 Experimento e Resultados Computacionais

A população consistiu em 250 ativos selecionados por meio de amostragem por conveniência. O critério de seleção desses ativos foi o maior volume de negociações de janeiro de 2009 a dezembro de 2010. Os dados coletados foram obtidos de origem secundária por meio do software *Bloomberg®*. A seleção da amostra para subsidiar a elaboração do modelo compreendeu o histórico de fechamentos mensais ajustados por proventos, bonificações, splits e inplits.

A estratégia da construção dos portfólios consistiu em uma metodologia míope de compra de ativos no final de dezembro de 2009 para venda no final de janeiro de 2010. Considerando os custos de transação na compra e venda. Os percentuais elaborados por meio da Bovespa (2011) foram fixados em DV = 84,953% e DC 85,048%. Esses percentuais representam custos diversos na negociação, conforme Tabela 1.

Tabela 1: Custos de Transação

Estimativa dos custos de transação, de compra e venda de ativos na Bolsa de Valores de São Paulo. Dentre os custos, o I.R. trata do percentual referente ao imposto de renda pessoa física e os demais referentes aos custos da CBLC - Companhia Brasileira de Liquidação e Custódia.

Custos Variáveis de Transação %			
Base	**Venda**	**Base**	**Compra**
Débito I.R.	15,000%	Crédito I.R.	15,000%
Custódia	0,013%	Custódia	-0,013%
Liquidação	0,006%	Liquidação	-0,006%
Negociação	0,029%	Negociação	-0,029%
Outros	0,000%	Outros	0,000%
Total %	15,048%	**Total %**	14,953%
1 - % = DV	84,953%	**1 - % = DC**	85,048%

Em relação às variáveis do modelo, foram utilizadas as Equações 1 e 2 para a elaboração do logaritmo dos retornos mensais de cada ativo. A partir dos retornos históricos foi usada a média simples dos retornos dos 250 ativos conforme modelo de Markowitz (1952).

Para a elaboração das instâncias de testes dos ativos os 250 ativos foram divididos em cinco instâncias com quantidades de 50 a 250 ativos, totalizando 5 instâncias, com acréscimo de 50 ativos para cada uma. Cada instância foi avaliada por meio de três valores de orçamentos de investimentos mínimo e máximo, sendo R$ 100.000 a R$ 120.000, R$ 500.000 a R$ 550.000 e R$ 1.000.000 a R$ 1.200.000. A blocagem dos dados teve como objetivo aumentar a precisão da validação do algoritmo proposto.

Para resolução do problema foi utilizado um computador com processador Intel Celeron 1.73 GHz, com 2 GB de memória. Os softwares utilizados foram Matlab® versão 7.8 e Ilog Cplex® 12.2. Para fidelização e comparação dos resultados do algoritmo foi comparado com o método misto quadrático inteiro, utilizando branch and bound por meio do software Cplex®. Para isto, também foram alterados alguns parâmetros de memória e tolerância para a execução do método quadrático exato.

A Tabela 2 mostra os resultados, em termos de tempo de processamento do experimento, obtidos com o algoritmo e o método puramente exato através de programação mista quadrática MIQP. Foram totalizados em 15 resultados comparados por meio de análise de sensibilidade do tamanho da população de busca e pela variação da disponibilidade orçamentária. Na Tabela 2, a primeira coluna consiste na identificação da instância; a segunda trata do tamanho da instância em função do número de ativos; a terceira a identificação dos orçamentos utilizados e a quarta e quinta coluna referem-se aos tempos computacionais de cada abordagem.

Os resultados em relação ao tempo computacional demonstraram que o algoritmo proposto reduz o tempo computacional significativamente, conforme a Tabela 2, principalmente para grandes instâncias. O processamento do algoritmo se demonstrou totalmente satisfatório em função da tendência de aumento exponencial do esforço computacional do método exato. Além da Tabela 2, o aumento do tempo em relação ao quantitativo de ativos na instância também é demonstrado por meio da Figura 4. Essa facilidade se dá por meio da utilização de uma heurística construtiva pela própria programação quadrática e por meio de uma busca local.

Tabela 2: Tempo de Resolução das Instâncias

A primeira coluna trata das Instâncias que foram classificadas pelo tamanho N de quantidade dos ativos contida na segunda coluna. A análise de sensibilidade foi feita por meio de variações do orçamento disponível pelo investidor na terceira coluna. Na quarta e quinta colunas foram demonstrados o tempo computacional em segundos para cada método, a MIQP - Programação Quadrática Inteira Mista pura e a abordagem da BT - Busca Tabu proposta.

		Orçamento	**Tempo (Seg)**	
Instância	**Quantidade de Ativos N**	**Milhares $**	**MIQP**	**BT**
I 01	**50**	100-120	1,34	0,86
I 01	**50**	500-550	0,28	0,78
I 01	**50**	1000-1200	2,84	1,90
I 02	**100**	100-120	0,94	1,09
I 02	**100**	500-550	4,68	4,74
I 02	**100**	1000-1200	3,39	17,18
I 03	**150**	100-120	0,70	0,89
I 03	**150**	500-550	6,47	2,22
I 03	**150**	1000-1200	4,17	19,09
I 04	**200**	100-120	7,10	2,85
I 04	**200**	500-550	1,44	1,62
I 04	**200**	1000-1200	1,90	2,92
I 05	**250**	100-120	37,71	3,09
I 05	**250**	500-550	212,16	2,22
I 05	**250**	1000-1200	35.780,51	1,36

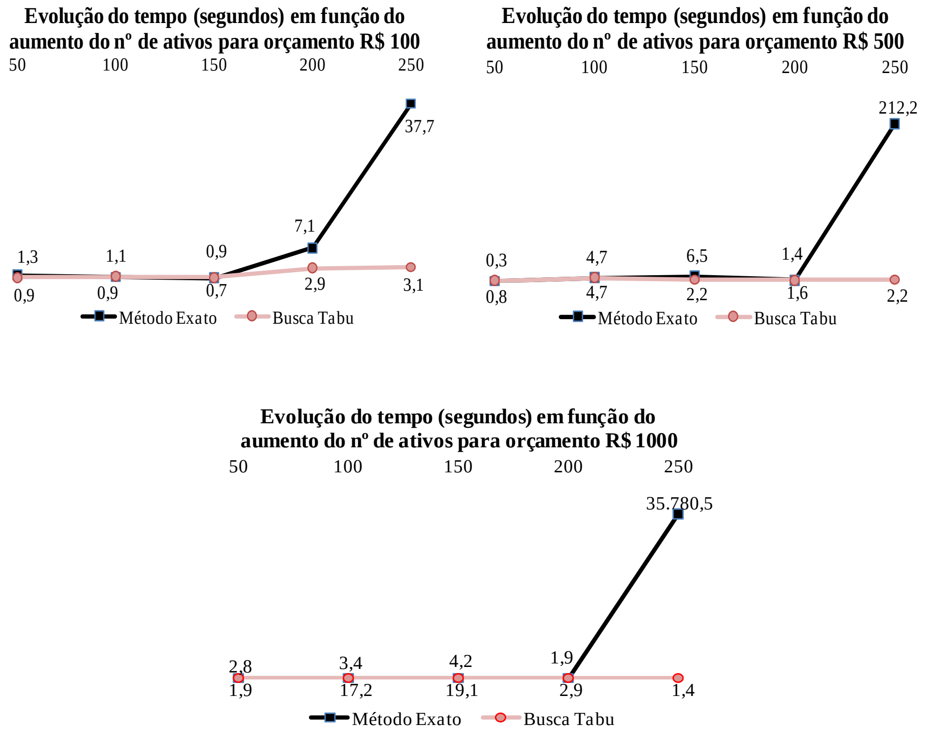

Figura 4: Análise do Tempo de Execução

Os resultados obtidos em relação ao alcance da função objetivo são demonstrados na Tabela 3. A quarta e quinta colunas tratam do valor da função objetivo representada pelo desvio padrão da carteira de investimento de cada abordagem utilizada. A sexta e última coluna representa o erro absoluto entre os resultados da função objetivo das duas abordagens.

Tabela 3: Função Objetivo de cada Abordagem

A primeira coluna trata das Instâncias que foram classificadas pelo tamanho N de quantidade dos ativos contida na segunda coluna. A análise de sensibilidade foi feita por meio de variações do orçamento disponível pelo investidor na terceira coluna. Na quarta e quinta colunas foram demonstrados os resultados da função objetivo, mensurados pelo desvio padrão da carteira de investimento de cada abordagem utilizada. A sexta e última coluna representa o erro absoluto entre os resultados da função objetivo das duas abordagens.

		Orçamento	**Risco (Var)**		**Erro Abs Risco**
Instância	**Quant i**	**Milhares $**	**MIQP**	**TS**	**TS - MIQP**
I 01	**50**	100-120	2,9808	2,9808	-
I 01	**50**	500-550	38,4143	40,0545	1,6402
I 01	**50**	1000-1200	150,9172	154,3533	3,4361
I 02	**100**	100-120	0,6059	0,6059	-
I 02	**100**	500-550	5,7689	6,2431	0,4742
I 02	**100**	1000-1200	19,9307	20,8974	0,9667
I 03	**150**	100-120	0,1035	0,1035	-
I 03	**150**	500-550	0,9695	1,8874	0,9179
I 03	**150**	1000-1200	2,5023	5,4531	2,9507
I 04	**200**	100-120	0,1575	0,1699	0,0124
I 04	**200**	500-550	0,0864	0,0864	-
I 04	**200**	1000-1200	0,2898	0,2898	-
I 05	**250**	100-120	0,0679	0,0747	0,0068
I 05	**250**	500-550	0,0259	0,0259	-
I 05	**250**	1000-1200	0,0600	0,0727	0,0126

Os resultados em relação ao alcance da função objetivo apresentaram alguns desvios pontuais em relação a solução ótima encontrada pelos métodos exatos, em se tratando de um modelo inteiro. As diferenças encontradas mostram uma variação de uma ou duas unidades no vetor de soluções inteiras.

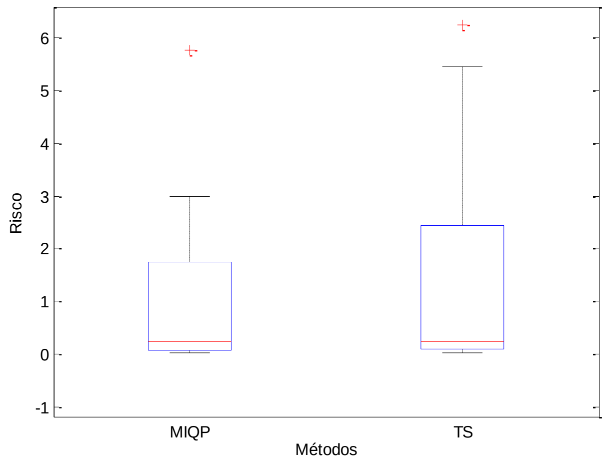

Figura 5: Boxplot do Risco das Soluções de Cada Método

Em relação ao espaço de busca, o algoritmo apresentou baixos coeficientes de erros na análise de sensibilidade. A Figura 5 apresenta o boxplot dos valores de risco por método usado. Com base nos gráficos foi constatado que a diferença entre os valores de risco apresentados graficamente não apresentaram diferenças significativas, apesar do algoritmo elaborado não alcançar a solução ótima em todos os testes.

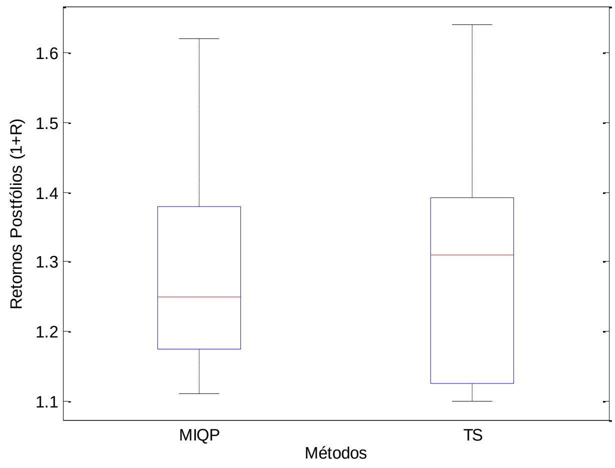

Figura 6: Boxplot dos Retornos das Soluções de Cada Método

Apesar da diferença nos valores de risco e de retorno das carteiras construídas pelo método da Busca Tabu, os resultados não apresentaram diferenças significativas, o que em conjunto com a análise de risco demonstra a viabilidade do uso do algoritmo diante da redução do esforço computacional. O boxplot representado na Figura 6 demonstra a distribuição dos retornos das soluções encontradas.

Os resultados do algoritmo proposto são próximos aos resultados de outros algoritmos propostos na literatura e que abordam o problema com variáveis contínuas como Lin e Liu (2008), Chen et al (2010) e Talebi et al (2010). Porém não foi possível realizar a comparação direta por se tratar de um modelo com aspectos diferentes de inserção de custos de transação para a modelagem discreta.

4. Considerações Finais

Este trabalho buscou abordar o problema de seleção de portfólio ótimo, propondo um modelo de algoritmo que pudesse construir soluções que satisfaçam o retorno exigido do investidor e em paralelo a redução do risco da operação. Cada vez mais, o modelo de Markowitz (1952) consegue considerar aspectos da realidade econômica dos mercados financeiros por meio de restrições mais realistas e algoritmos mais inteligentes. Assim, o modelo de média variância, de estrutura quadrática, considerando variáveis inteiras para compras em lotes de ativos, possui grande complexidade e faz parte da classe de problemas NP-difíceis, o que justifica a exigência de algoritmos computacionais com melhor desempenho.

Da mesma forma, a metodologia da Busca Tabu é uma poderosa ferramenta para busca de soluções em problemas com alto nível de complexidade e com restrições antagônicas, o que se mostrou viável para utilização diante do tipo do problema exposto.

Atualmente, o método de Busca Tabu vem sendo aplicado em conjunto com modelos de programação matemática exata, como Di Gaspero et al (2007).

A presente pesquisa propõe a utilização de um método de Busca Tabu, adaptado ao problema discreto apresentado, como forma de melhorar o resultado computacional e reduzir o tempo para tomada de decisão de investimentos, principalmente com volumes significativos de investimento e de diversidade de ativos.

O algoritmo de busca associado à programação inteira e quadrática apresentou resultados satisfatórios diante do esforço computacional exigido pelo problema, principalmente por manter o risco e os retornos bastante próximos das soluções ótimas do experimento. Apesar do desempenho, é necessário o uso de outras instâncias para testes, considerando fatores como momento econômico, tipologia dos ativos, período de cálculo dos coeficientes, método de estimativas de retornos e outros.

Como resultado prático, o método inteiro de montagem de carteira de investimentos, pode ser utilizado para investimentos em ativos reais em unidades discretas e que possam ser mensurados em termos de média e covariância dos ativos. A flexibilidade do uso de algoritmos permite a inserção e combinação com outros métodos e estratégias de investimentos.

Agradecimentos

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte – IFRN pelo apoio de recursos.

Referências

Albuquerque, G.U.V.(2009). Um estudo do problema de escolha de portfólio ótimo. São Carlos, SP: ICMC. Dissertação de Mestrado — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação USP.

Alexander, G. J. & Baptista, A. M. (2002). Economic implications of using a mean-VaR model for portfolio selection: A comparison with mean-variance analysis. Journal of Economic Dynamics and Control, v. 26, n. 7-8, 1159-1193.

Anagnostopoulus, K.P. & Mamanis, G. (2010). Using Multiojective Algorithms to Solve the Discrete Mean-Variance Portfolio Selection. International journal of economics and finance. v. 2, n. 3, 152-162.

Bertsimas, D. & Shioda, R. (2009). Algorithm for cardinality-constrained quadratic optimization. Comput. Optim. Appl., v. 43, n. 1, 1-22.

Bovespa. Custos. São Paulo: Bovespa. (2011). Disponível em: < http://www.bmfbovespa.com.br/pt-br/regulacao/acoes/custos-operacionais/custos-operacionais.aspx?Idioma=pt-br >. Acesso em: 21 jan. 2011.

Brandt, M. W. & Santa-Clara, P. (2006). Dynamic Portfolio Selection by Augmenting the Asset Space. The Journal of Finance, v. 61, n. 5, 2187-2217.

Chang, T.-J. et al. (2000). Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation. Comput. Oper. Res., v. 27, n. 13, 1271-1302.

Chen, Y. et al. (2010) A portfolio selection strategy using Genetic Relation Algorithm. In: Evolutionary Computation (CEC), IEEE Congress on, 18-23 July 2010.

Chiodi, L. et al. (2003) Semi-Absolute Deviation Rule for Mutual Funds Portfolio Selection. Annals of Operations Research, v. 124, n. 1, 245-265.

Cohen, K. J. & Pogue, J. A. (1967). An Empirical Evaluation of Alternative Portfolio-Selection Models. The Journal of Business, v. 40, n. 2, 166-193.

Crama, Y. & Schyns, M. (1999) Simulated Annealing for Complex Portfolio Selection Problems. UNIVERSITE DE LIEGE, Faculte d'economie, de gestion et de sciences sociales, Groupe d'Etude des Mathematiques du Management et de l'Economie.

Dias, C.H. (2008) Um novo algoritmo genético para a otimização de carteiras de investimento com restrições de cardinalidade. Campinas, SP: IMEC. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Di Gaspero, L. et al. (2007). Hybrid Local Search for Constrained Financial Portfolio Selection Problems. In: VAN HENTENRYCK, P.; WOLSEY, L. (Ed.). Integration of AI and OR Techniques in Constraint Programming for Combinatorial Optimization Problems: Springer Berlin / Heidelberg, 44-58.

Elton, E. J. & Gruber, M. J. (2004). Modern portfolio theory and investment analysis. 2 ed. New York: Wiley.

Ewald, R. et al. (2010). Selecting Simulation Algorithm Portfolios by Genetic Algorithms. In: Principles of Advanced and Distributed Simulation (PADS), IEEE Workshop on, 17-19 May 2010, 1-9.

Fama, E.F. (1965). The behavior of stock-market prices. The journal of business. v.38, n.1, 34-105.

Ferreira, R.J.P. et al. (2009). A decision model for portfolio selection. Pesquisa Operacional, v.29, n.2, 403-417.

Fouskakis, D. & Draper, D. (2002). Stochastic Optimization: a Review. International Statistical Review, v. 70, n. 3, 315-349.

Glover, F. (1986). Future paths for integer programming and artificial intelligence. Computers & Operations Research, v. 13, 533-549.

Golmakani, H. R.; Fazel, M. Constrained Portfolio Selection using Particle Swarm Optimization. Expert Systems with Applications, v. 38, n. 7, 8327-8335, 2011.

Gilli, M. & Schumann, E. (2010). Heuristic Optimisation in Financial Modelling. Annals of Operations Research, Forthcoming.

Hansen, P. (1986). The steepest ascent mildest descent heuristic for combinatorial programming. Congress on Numerical Methods in Combinatorial Optimization. Capri.

Konno, H. (1990). Piecewise linear risk function and portfolio optimization. Journal of the Operations Research Society of Japan, v. 33, n. 2, 139-156.

Konno, H. & Yamazaki, H. (1991). Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market. Management Science, v. 37, n.5, 519-531.

Lai, K. Et al. (2006). A Double-Stage Genetic Optimization Algorithm for Portfolio Selection. In: KING, I. et al (Ed.). Neural Information Processing: Springer Berlin / Heidelberg, 928-937.

Levy, H. & Kroll, Y. (1976). Stochastic Dominance with Riskless Assets. Journal of Financial and Quantitative Analysis, v. 11, n. 05, 743-777.

Li, H.-L. & Tsai, J.-F. (2008). A Distributed computation algorithm for solving portfolio problems with integer variables. European Journal of Operational Research, v. 186, n. 2, 882-891.

Lin, C.-C. & Liu, Y.-T. (2008). Genetic algorithms for portfolio selection problems with minimum transaction lots. European Journal of Operational Research, v. 185, n. 1, 393-404.

Mansini, R. et al. (2003). LP solvable models for portfolio optimization: a classification and computational comparison. IMA Journal of Management Mathematics, 1 jul. 2003, v. 14, n. 3, 187-220.

Mansini, R. & Speranza, M. G. (1999). Heuristic algorithms for the portfolio selection problem with minimum transaction lots. European Journal of Operational Research, v. 114, n. 2, 219-233.

Markowitz, H. M. (1952). Portfolio Selection. Journal of Finance, 77-91.

_________. (1956). The optimization of a quadratic function subject to linear constraints. Naval Research Logistics Quarterly, v. 3, n. 1-2, 111-133.

Marques, F.T. (2007). Otimização de carteiras com lotes de compras e custos de transação, uma abordagem por algoritmos genéticos. São Carlos, SP: EESC. Dissertação de Mestrado — Escola de Engenharia de São Carlos USP.

Martin, A.D. (1955). Mathematical programming of portfolio selections. Management Science. V.1, n.2, 152-166.

OECD. (2010). Tackling Inequalities in Brazil, China, India and South Africa. OECD Publishing.

Schaerf, A. (2002). Local Search Techniques for Constrained Portfolio Selection Problems. Computational Economics, v. 20, n. 3, 177-190.

Sharpe, W. F. (1964). Capital-Asset Prices - a Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. Journal of Finance, v. 19, n. 3, 425-442.

Speranza, M. G. (1996). A heuristic algorithm for a portfolio optimization model applied to the Milan stock market. Computers and Operations Research, v. 23, n. 5, 433-441.

Streichert, F. & Yamawaki, M.T. (2006). The Effect of Local Search on the Constrained Portfolio Selection Problem. In: Evolutionary Computation, 2006. CEC 2006. IEEE Congress on, 2368-2374.

Talebi, A. et al. (2010). Performance investigation and comparison of two evolutionary algorithms in portfolio optimization: Genetic and particle swarm optimization. In: Information and Financial Engineering (ICIFE), 2010 2nd IEEE International Conference on, 17-19 Sept. 2010, 430-437.

Tsai, R.S. (2005). Analysis of Financial Time Series. 2 ed. Chicago: Wiley.

Tobin, J. (1958). Liquidity Preference as Behavior Towards Risk. Review of Economic Studies, London, v. 26, n. 1, 65-86.

Wolfe, P. (1959). The Simplex Method for Quadratic Programming. Econometrica, v. 27, n. 3, 382-398.

Pascal, J. M. (2004). Robust Portfolio Rules and Asset Pricing. Review of Financial Studies, v. 17, n. 4, 951-983.

Pástor, L. (2000). Portfolio selection and asset pricing models. Journal of Finance, v. 55, n. 1, 179-223.