

REVISÃO DE DESAFIOS APLICADOS EM LOCALIZAÇÃO COM BASE EM MODELOS DA p -MEDIANA E SUAS VARIANTES*

Nelio D. Pizzolato

Departamento de Engenharia Industrial
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
ndp@puc-rio.br

Fernanda M. P. Raupp

Departamento de Engenharia Industrial
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
fraupp@puc-rio.br

Guina Sotomayor Alzamora

Departamento de Engenharia Industrial
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
guinas@gmail.com

Resumo

Este trabalho busca destacar a relevância do tema localização em questões que afetam diretamente a sociedade moderna, assim como sua relevância no ambiente acadêmico, cujas contribuições são abundantes e altamente reconhecidas. Observando a complexidade de um problema que denominamos por *desafios aplicados*, ao abordá-lo, tem-se que buscar uma solução prática, começando por sua formulação matemática e, depois, pela escolha apropriada de um método de solução. Especificamente, este trabalho aborda tipologias metodológicas, examinando problemas de localização no plano e em redes, com destaque para o modelo da p -mediana e suas múltiplas extensões. O trabalho também aborda alguns métodos de solução, tanto heurísticos como exatos, apresentando brevemente suas características básicas, assim como aborda a técnica dos diagramas de Voronoi. A ênfase maior do artigo encontra-se no levantamento de aplicações, quase todas, mas não exclusivamente, observadas no ambiente nacional, na forma de artigos, teses e dissertações. Pretende-se oferecer à comunidade uma visão maior dos desafios aplicados, uma extensa e selecionada bibliografia e uma forte motivação para assumir tal especialização.

Palavras-Chave: Localização, Modelo da p -mediana, Diagramas de Voronoi

Abstract

This work focuses on the relevance of the location theme in issues that affect directly the modern society, as well as on its relevance to the scientific community, whose contributions are abundant and highly recognized. Noticing the complexity of a problem that we denominate *applied challenges*, when addressing it one has to look for a practical solution, starting with its mathematical formulation, and subsequently choosing the appropriate solution method. Specifically, this work presents some methodological typologies, through the study of location problems in the plane and also in networks, with emphasis on the p -median model with its multiple extensions. This work also presents some heuristic and exact solution methods, showing their basic characteristics, as well as it presents the Voronoi diagrams technique. The major contribution of this work is related to the variety of applications presented, most of which concerned with the national ambient, in the form of articles, thesis and dissertations. We intend to offer the community an extended view of applied challenges, an ample and selected bibliography, and a great motivation to assume such specialization.

Keywords: Location, p -median Model, Voronoi Diagrams

* Versão preliminar deste artigo foi apresentada como plenária no SBPO 2010, em Bento Gonçalves.

1. Introdução

O tema *localização* sempre desfrutou de grande relevância na história humana, desde o homem primitivo, lutando por sua sobrevivência, ao moderno, buscando vantagens econômicas e ampliação de seu bem-estar. Em épocas remotas, o problema era visto como pontual, enquanto hoje ele é tratado de forma transtemporal e multidisciplinar.

Problemas de localização tratam de decisões sobre onde instalar unidades de serviço ou, simplesmente, facilidades, supondo que os demandantes, ou clientes, devem ser atendidos de forma a otimizar algum critério (Drezner, 1995). O termo “facilidades” pode ser interpretado como postos de saúde, escolas, fábricas etc, enquanto que clientes se referem respectivamente a gestantes, estudantes, compradores etc. Conceitualmente, o problema de localização é mais abrangente do que determinar a localização de facilidades, pois do ponto de vista da logística, outros aspectos costumam ser colocados como, por exemplo, a quantidade, a capacidade, a funcionalidade, as fontes de abastecimento, as regiões de atendimento etc.

Análises geométricas do problema nascem da sua própria natureza, ao buscar centros de gravidade, distâncias mínimas, lugares geométricos, bissetrizes, mediatrizes e outras propriedades. O apogeu dos estudos de localização no mundo antigo poderia ser atribuído a Arquimedes (c. 287-212 a.C.) que, unindo conhecimentos de física e geometria, teria elaborado o notável plano de defesa de Siracusa para incendiar navios romanos por meio de espelhos refletores e concentradores de raios solares, além de bombardeá-los com lançadeiras mecânicas (há historiadores, porém, que duvidam de tais feitos, cf. Enc. Britânica).

Em eras mais recentes da história, tendo por base a geometria euclidiana, estudos sobre identificação de pontos no plano possuindo determinadas propriedades costumam ser atribuídos a Fermat (1601-1665) e Torricelli (1608-1647), de acordo com Drezner *et al.* (2004).

Estudos incluindo elementos econômicos decorrem de desafios do mundo moderno e Weber (1909) é considerado seu pioneiro. Ele examina a localização de uma atividade industrial, envolvendo o beneficiamento de matérias-primas e a distribuição ao mercado consumidor, e conclui que, se o processo for perdedor de peso, ele deverá localizar-se perto da fonte das matérias-primas e, caso seja ganhador de peso, perto do mercado final. As atividades extrativas minerais, por exemplo, em que grandes volumes de rejeitos surgem junto ao mineral desejado, estariam no primeiro caso, enquanto que a produção de bebidas obtidas adicionando-se água a concentrados ou a produção de colchões de espuma decorrentes de reações químicas absorvedoras do ar atmosférico (caso, por exemplo, de instalação em Belém, PA, para suprir a demanda da região amazônica, a partir de grandes cilindros de produtos químicos) seriam exemplos do segundo caso.

No mundo atual, a localização é um desafio multidisciplinar. Seus problemas reais, em geral de natureza econômica, são tratados mediante modelagens baseadas em elaborações geométricas e resolvidos com recursos informáticos. Como consequência, o tema localização permeia várias fronteiras da ciência e goza de um prestígio excepcional. Na nossa avaliação, os problemas de localização podem ser classificados em três vertentes: os práticos, os acadêmicos e os aplicados.

Na vertente prática estão aqueles desafios tipicamente assumidos por empresas de consultoria que buscam determinar a localização ideal de uma atividade industrial ou comercial específica. De acordo com Buarque (1986), para embasar tais decisões examina-se um elenco de aspectos relevantes, variando desde qualidade da infraestrutura, disponibilidade da mão-de-obra e acessos viários, até regime pluviométrico e, muito especialmente, benefícios fiscais. Estudos práticos podem gerar valor para empresas de consultoria, mas não costumam gerar publicações científicas, diante de interesses e sigilos envolvidos. Cabe ressaltar que, ao passar de uma única para múltiplas instalações, a complexidade do problema muda de patamar.

Acreditamos que, na história brasileira, o primeiro desafio prático de grande ressonância colocado ao debate público, para localizar uma atividade econômica, ocorreu ao final da década de 40, quando chegaram ao Brasil os equipamentos para a instalação da Companhia Siderúrgica Nacional – CSN, sendo objeto de um acordo com os Estados Unidos

para participação de tropas do Brasil na 2ª Guerra Mundial. Os estados mais influentes, São Paulo, Minas Gerais e Rio de Janeiro, então capital, pleiteavam sua localização, gerando-se grande controvérsia sobre o problema. Ao decidir pelo centro geométrico localizado em Volta Redonda, a solução adotada pelo Governo Federal contemplou politicamente as três fontes de pressão. O desenvolvimento subsequente dos investimentos industriais induzidos no vale do Paraíba e no setor de transporte ferroviário e rodoviário, que integraram as três regiões, mostrou ter sido essa uma boa decisão. Hoje, certamente, a decisão mais econômica teria definido outro local, favorecendo um porto oceânico, como as últimas siderúrgicas por aqui instaladas, como a CSA, Cia Siderúrgica do Atlântico, em Itaguaí, além da COSIPA, CST e GERDAU, ou uma região ferrífera do interior, conjugando-se a exportação de minérios ao transporte ferroviário do carvão mineral como carga de retorno, como foi o caso da Usiminas e da Açominas. A propósito, a CSN está desenvolvendo um novo projeto de expansão, a CSN-2, a ser localizada também em Itaguaí, prevendo-se o possível uso do porto da CSA.

Na vertente acadêmica estão aqueles atores envolvidos com a proposta de desenvolver modelos matemáticos cada vez mais refinados. Tais modelos abordam propostas derivadas do aprendizado e do exercício da criatividade humana, tendo em mente a contribuição ao conhecimento, mas não necessariamente associado a aplicações específicas, assim como o desenvolvimento de métodos de solução com a base matemática própria da Pesquisa Operacional. O ambiente acadêmico, igualmente, favorece o desenvolvimento de recursos computacionais na forma de *hardware* e de *software*. O trabalho acadêmico resulta em avanços da ciência, e na ampliação do elenco de problemas reais que conseguem ser resolvidos com sua utilização. As atividades acadêmicas são muito motivadoras, pois suas contribuições são vistas como legítimas, respeitáveis, e de interesse científico. O número de artigos e pesquisas dedicados ao tema localização atesta o notável prestígio e relevância desses desenvolvimentos.

Na vertente aplicada estão aqueles que fazem pesquisa visando resolver desafios do mundo real, notadamente complexos, beneficiando-se das contribuições proporcionadas pela área acadêmica. Trabalhos aplicados costumam seguir a metodologia básica da Pesquisa Operacional, a qual passa pela identificação do problema, a formulação de um modelo matemático com o uso de hipóteses simplificadoras, a resolução do modelo, a validação dos resultados e o posterior oferecimento de propostas para implementação. Esse tipo de trabalho é usualmente considerado por pesquisadores em ciências aplicadas na busca por respostas a problemas observados pela sociedade, mas também a problemas encontrados em toda sorte de atividades industriais. Esses estudos tendem a resultar em soluções de maior eficiência no uso dos recursos disponíveis, enquanto que no ambiente universitário tais estudos resultam em teses ou dissertações e, mais adiante, em artigos científicos. Exemplos de trabalhos aplicados, sobretudo no ambiente nacional constituem o eixo principal deste trabalho e diversos estudos encontram-se relatados mais abaixo.

O problema de localização pode ser considerado onipresente, por ser objeto de um interesse tão amplo que tem gerado uma vastidão de artigos e pesquisas. Segundo Current *et al.* (2002), os seguintes fatores têm colaborado para esse destaque, que, brevemente, seriam: i) decisões de localização são freqüentemente feitas em todos os níveis de organizações humanas; ii) essas decisões são em geral estratégicas em sua natureza, com efeitos em longo prazo; iii) nessas decisões externalidades devem ser consideradas, como por exemplo, poluição, congestão, desenvolvimento econômico; iv) modelos de localização são extremamente difíceis de serem resolvidos, pelo menos de forma ótima; e v) esses modelos são específicos a cada aplicação, não havendo um modelo genérico, apropriado a todo tipo de problema.

Com tal amplitude, não é de admirar que existam muitos trabalhos do tipo revisão da literatura, na forma de artigos e de livros. Dentre os primeiros citamos Brandeau e Chiu (1989), ReVelle e Eiselt (2005) e Reese (2006), dentre os demais destacamos Daskin (1995), Drezner e Hamacher (2004), Drezner (2004) e Farahani e Hekmatfar (2009).

Os problemas de localização podem ocorrer em dois ambientes de referência: o *plano* e a *rede*, enquanto que a solução de todo problema requer a especificação de distâncias entre cada par de pontos. No caso do *plano*, podem valer as distâncias euclidianas, em que se aplica

o princípio que a distância mais curta entre dois pontos é dada pelo segmento de reta que os une; as distâncias metropolitanas ou outras possíveis métricas. No segundo caso, localização em *redes*, há que se levar em conta os caminhos possíveis entre cada par de pontos, eventualmente afetados por elementos topográficos, barreiras de todo tipo e, especialmente, pelas vias orientadas que o cliente do serviço deve percorrer, embora se possa usar, em caráter aproximativo, outras métricas, inclusive a euclidiana.

O presente trabalho reúne uma amostra de problemas relevantes sobre localização, discutindo metodologias e abordando técnicas de resolução, mas o objetivo predominante é oferecer um amplo leque de aplicações notáveis, com base no modelo da p -mediana, apresentadas na literatura e ilustradas com exemplos representativos. A maior parte dos exemplos foi desenvolvida no ambiente nacional, como o leitor bem poderá estimar, sendo a maioria obtida em teses e dissertações.

Portanto, a proposta é reunir conceitos, modelos e metodologias, em geral ilustrados com exemplos de aplicações em diversos contextos, capazes de motivar estudantes e pesquisadores a ampliarem suas linhas de pesquisa nas direções aqui apontadas, além de oferecer uma extensa bibliografia de apoio. A maior parte dos exemplos ilustrativos envolve o modelo da p -mediana e seus modelos derivados por serem os mais usados. Claro que a problemática da localização é bem mais ampla, como sugere, por exemplo, o recente livro de Farahani e Hekmatfar (2009), que contém capítulos com sugestivos títulos, como, dentre vários outros: localização hierárquica, competitiva, dinâmica, facilidades indesejáveis, localização multicritério, medianas e centros, *hubs*, cobertura completa e máxima. No que se refere às metodologias abordadas neste texto, apresentamos alguns métodos de solução, assim como a técnica dos Diagramas de Voronoi que oferecem, em alguns casos, sugestivas aplicações e, em outros, boas aproximações. Apesar de sua grande importância na resolução de problemas de localização atualmente, como se pode verificar nos trabalhos, por exemplo, de [Mladenović et al.](#)(2007) e de Almeida e Senne (2010), o foco deste texto não é abordar metaheurísticas.

O presente texto encontra-se assim organizado: a Seção 2 apresenta o modelo básico da p -mediana, seguido por diversas de suas mais importantes variantes, e ainda apresenta a técnica de diagramas de Voronoi. A Seção 3 passa ao tema prático de localização no plano e em redes, mostrando diversos exemplos de aplicações. Uma introdução é feita em cada exemplo apresentado, porém sem transcrição de detalhes técnicos. A Seção 4 elabora um breve exame de alguns métodos de solução, tanto métodos exatos como heurísticas clássicas. A Seção 5 apresenta conclusões e vem sucedida por uma extensa bibliografia.

2. Tipologias metodológicas

2.1. O modelo da p -mediana

O modelo matemático mais popular associado ao problema de localização de atividades ou de postos de serviços, ou *facility location* em inglês, é o modelo da p -mediana, o qual escolhe p medianas ou pontos para localizar instalações (*facilities*) de modo a minimizar a impedância do sistema, ou seja, a soma ponderada das distâncias dos clientes, centrados em cada vértice ou centróide, às instalações disponíveis. O uso do modelo da p -mediana é apropriado nos casos em que cada cliente seguidamente percorre a distância entre a sua origem e o local que oferece o serviço, tornando-se conveniente minimizar o somatório de tais distâncias. Esse é o caso típico, por exemplo, do deslocamento diário residência-escola-residência de um escolar, caso seguidamente abordado na presente revisão. Certamente, os exemplos se multiplicam em consonância com os desafios da sociedade.

Para uniformizar a linguagem, quanto à localização de escolas, em que os clientes são escolares, os centróides são pontos de concentração de alunos, usualmente, pontos centrais dos setores censitários. Certamente, a outros pares de atores se aplica o mesmo princípio, como por exemplo: bebê/creche; gestante/maternidade; enfermo/posto de saúde; loja/centro de

distribuição; consumidor/posto de serviço; população/parque recreativo; rede elétrica/estação distribuidora; lixo residencial/vazadouro; eleitor/posto eleitoral; população/alarme; celular/ponto de retransmissão; poço de petróleo/plataforma.

Sejam $N = \{1, \dots, n\}$ o conjunto de pontos de demanda; $i \in N$ um determinado cliente ou vértice; $j \in N$ uma instalação em potencial ou mediana; p o número de instalações de serviço ou medianas a serem localizadas; w_i o peso ou importância do cliente i ; $[d_{ij}]_{n \times n}$ a matriz simétrica de distâncias de cada cliente i à instalação j , com $d_{ii} = 0, \forall i$; $[x_{ij}]_{n \times n}$ a matriz de alocação de cada cliente i ; onde $x_{ij} = 1$ se o cliente i é alocado à instalação j e $x_{ij} = 0$, caso contrário; $x_{jj} = 1$ indica que j é uma mediana e $x_{jj} = 0$ em caso contrário. Então, o modelo da p -mediana é apresentado da seguinte forma:

$$\text{Min } Z = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} w_i d_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{j \in N} x_{ij} = 1; \quad i \in N \quad (2)$$

$$\sum_{j \in N} x_{jj} = p \quad (3)$$

$$x_{ij} \leq x_{jj}; \quad i, j \in N \quad (4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}; \quad i, j \in N, \quad (5)$$

onde a função objetivo (1) indica a minimização das distâncias ponderadas entre os clientes e os postos que oferecem serviços; as restrições em (2) indicam que cada cliente i é alocado a somente uma instalação j ; a restrição (3) garante que somente p instalações oferecem o serviço proposto; as restrições em (4) afirmam que um cliente somente é atendido num local onde existe uma instalação que oferece o serviço, e as restrições em (5) impõem variáveis de decisão binárias.

Cabe lembrar que pode existir uma lista prévia de pontos candidatos a serem escolhidos como mediana; nesse caso o modelo acima sofre pequenas modificações e recebe o nome tradicional de problema de localização de uma planta simples ou em inglês *simple plant location model (SPLP)*, a ser apresentado adiante, na Seção 2.2.3.

Observamos ainda que, em lugar de localização, o modelo acima pode ser interpretado como modelo de zoneamento, em que se busca dividir o espaço em p zonas, como sugerido no modelo dos helicópteros na Seção 3.1.1 ou na proposta de localização de escolas, caso (c) da Figura 8, em que, para cada escola existe uma área de atração. Nessa ótica de zoneamento, o modelo da p -mediana pode ser aplicado ao problema de classificação de um conjunto de padrões, conhecido como *cluster analysis* (Xavier e Xavier, 2011), que busca agrupar elementos com padrões semelhantes em certo *cluster* e com padrões diferentes em *clusters* distintos.

2.2. Variantes do modelo p -mediana

Nesta seção apresentaremos algumas das variantes mais conhecidas do modelo da p -mediana apresentado na seção anterior. Reese (2006) anuncia métodos de resolução, mas seu trabalho se notabiliza pela diversificada gama de aplicações suplementares desse modelo.

2.2.1. Modelo da p -mediana com custos fixos

O modelo da p -mediana com custos fixos difere da formulação do problema da p -mediana na definição da função objetivo, adicionando-se o custo fixo f_j de cada instalação j , como podemos verificar:

$$\text{Min } Z = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} w_i d_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in N} f_j x_{jj} \quad (6)$$

$$\text{Sujeito a: } \sum_{j \in N} x_{ij} = 1, \quad i \in N \quad (7)$$

$$\sum_{j \in N} x_{jj} \leq p, \quad j \in N \quad (8)$$

$$x_{ij} \leq x_{jj}, \quad i, j \in N \quad (9)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j \in N. \quad (10)$$

A função objetivo (6) indica a minimização da soma das distâncias ponderadas entre os clientes e os postos de serviço e dos custos de se criar novas instalações. Nas restrições, a diferença em relação à formulação básica é a substituição da restrição (3) pela restrição (8), já que neste caso o número de instalações pode ser no máximo igual a p . Nota-se que as restrições (7), (9) e (10) são idênticas às (2), (4) e (5), respectivamente.

2.2.2. Problema da p -mediana capacitado

Considera-se que para cada instalação j existe uma capacidade máxima de atendimento Q_j . Desse modo, a nova variante é formulada como:

$$\text{Min } Z = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} w_i d_{ij} x_{ij} \quad (11)$$

$$\text{Sujeito a: } \sum_{j \in N} x_{ij} = 1, \quad i \in N \quad (12)$$

$$\sum_{j \in N} x_{jj} = p \quad (13)$$

$$\sum_{i \in N} w_i x_{ij} \leq Q_j x_{jj}, \quad j \in N \quad (14)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j \in N. \quad (15)$$

A formulação do problema da p -mediana capacitado difere da formulação básica do problema da p -mediana no que se refere à restrição que associa o cliente i à instalação j , isto é, substitui-se a restrição (4) pela restrição (14), já que neste presente caso considera-se a capacidade de atendimento Q_j da facilidade x_{jj} . O modelo acima supõe exclusividade entre cada centroide e cada facilidade, pois as variáveis x_{ij} são binárias. Caso a restrição de integralidade das variáveis seja relaxada, então uma nova variante deste modelo é obtida.

2.2.3. Problema de localização de uma planta simples

Este problema, conhecido em inglês por *simple plant location problem (SPLP)*, tem um caráter histórico, pois foi esse o nome dado aos primeiros modelos de pesquisa operacional de problemas de localização e transporte de produtos ou serviços, em inglês, *location allocation problems*. Este modelo tende a ser usado em ambientes industriais, onde se objetiva localizar uma ou mais fábricas (*plants*) dentre um conjunto de possíveis pontos previamente identificados, e daí abastecer a demanda de diversos centros de consumo. Nos modelos anteriores a escolha dos p postos de serviço é feita dentre os N vértices da rede, enquanto que neste modelo existe uma seleção prévia de um conjunto J de localidades potenciais que podem acolher as p instalações.

Sejam I o conjunto de clientes que demandam determinado serviço; J o conjunto de candidatos potenciais a localizar o posto de serviço; d_{ij} a matriz de distâncias entre os clientes

$i \in I$ e os candidatos potenciais $j \in J$; x_{ij} a decisão de alocação, isto é, se $x_{ij} = 1$ o cliente i é alocado à instalação j , e $x_{ij} = 0$, no caso contrário; y_j a decisão sobre selecionar o candidato j como posto de serviço, isto é $y_j = 1$ se $j \in J$ for selecionado para oferecer o serviço e $y_j = 0$, caso contrário; e f_j o custo fixo de selecionar o vértice j para oferecer o serviço. Então, o problema de localização de uma planta simples pode ser formulado como:

$$\text{Min} \quad Z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in J} f_j y_j \quad (16)$$

$$\text{Sujeito a:} \quad \sum_{j \in J} x_{ij} = 1, \quad i \in I \quad (17)$$

$$x_{ij} \leq y_j; \quad i \in I, j \in J \quad (18)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}; \quad i \in I, j \in J \quad (19)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j \in J. \quad (20)$$

Esse modelo difere da formulação do problema da p -mediana. A definição da função objetivo (16) é distinta, já que é considerado um conjunto potencial de instalações J para cobrir a demanda I e é adicionado o custo de se criar uma instalação em j . Quanto às restrições, (2) assemelha-se à (17), mas o conjunto de localizações examinado restringe-se ao conjunto de candidatos potenciais J , a restrição (18) substitui a restrição (4) e as restrições (19) e (20) cumprem o mesmo papel da restrição (5), ou seja, impõem variáveis de decisão binárias.

2.2.4. O problema da localização com cobertura completa

Esse modelo é conhecido em inglês como *the set covering location model (SCLM)*. O objetivo é localizar o número mínimo de instalações necessárias para atender a todos os pontos de demanda. Para isso, define-se S como sendo o afastamento máximo entre um ponto de demanda e um ponto de oferta do serviço, e ainda considera-se o conjunto das localizações potenciais que atendem o ponto de demanda $i \in I$, limitados ao afastamento S :

$$N_i = \{j | d_{ij} \leq S\}, \quad (21)$$

onde d_{ij} denota a distância entre os pontos i e j . Logo, $x_j = 1$ indica se o vértice $j \in J$ é selecionado para o serviço e $x_j = 0$, no caso contrário. Assim, a formulação do problema é dada por:

$$\text{Min} \quad Z = \sum_{j \in J} x_j \quad (22)$$

$$\text{Sujeito a:} \quad \sum_{j \in N_i} x_j \geq 1, \quad i \in I \quad (23)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in J. \quad (24)$$

A função objetivo (22) procura minimizar o número de instalações; a restrição (23) indica que um cliente deve ser atendido por uma ou mais instalações dentro de uma distância máxima determinada e a restrição (24) impõe variáveis de decisões binárias.

2.2.5. Problema da localização com cobertura máxima

Esse modelo é conhecido em inglês como *the maximal covering location problem (MCLP)*. Ao contrário do modelo (SCLM) anterior, que pretende minimizar o número de instalações de modo a atender a toda a demanda, neste modelo é dado um número pré-fixado p de instalações e deseja-se localizá-las de modo a maximizar a demanda atendida. Deve-se

ressaltar que, em ambos os modelos, atender a demanda significa que o afastamento máximo S entre os pontos de demanda e de oferta seja respeitado.

Sejam w_i a demanda no vértice $i \in I$; p o número de instalações a serem ativadas; $x_j = 1$ se o vértice $j \in J$ for selecionado para se tornar uma instalação e $x_j = 0$, caso contrário; $z_i = 1$ se o vértice $i \in I$ é atendido por alguma instalação e $z_i = 0$, caso contrário. Assim, a formulação matemática do problema (MCLP) é dada por:

$$\text{Max } Z = \sum_{i \in I} w_i z_i \quad (25)$$

$$\text{Sujeito a: } \sum_{j \in N_i} x_j - z_i \geq 0, \quad i \in I \quad (26)$$

$$\sum_{j \in J} x_j = p \quad (27)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in J \quad (28)$$

$$z_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I. \quad (29)$$

A função objetivo (25) maximiza a demanda coberta; a restrição (26) afirma que um cliente será coberto se existe pelo menos uma instalação localizada dentro da distância de cobertura. A restrição (27) limita a exatamente p o número de instalações localizadas e as restrições (28) e (29) definem variáveis de decisão do tipo binário.

2.2.6. Localização de Hubs

Numa rede de transporte, um *hub* representa um ponto de concentração, que consolida a demanda e favorece o transporte subsequente. No problema de localização de *hubs* em uma rede, propõe-se transferir cargas de vértices de menor demanda (*spokes*), para *hubs* concentradores e desses, de modo consolidado e a custos reduzidos, para outro *hub* e daí para o destino final, outro vértice do tipo *spoke*. Esse sistema foi desenvolvido pelo serviço postal americano, mas é hoje usado no transporte aéreo e no transporte de cargas terrestres parceladas. No caso do transporte aéreo, o sistema oferece diversos benefícios, tais como o aumento na oferta e na frequência de vôos e a diminuição no valor dos custos. A primeira formulação matemática para esse problema foi proposta por O'Kelly (1987), com uma função objetivo não linear.

Sejam w_{ij} o fluxo entre os vértices i e j , com $i, j \in N$; c_{ij} o custo unitário de transporte entre os vértices i e j ; α o fator de desconto para o transporte entre *hubs*; p o número de *hubs*; $x_{jj} = 1$ se o nó j é um *hub*, e $x_{jj} = 0$ caso contrário. O modelo original do modelo p -*hub* é:

$$\text{Min } Z = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} w_{ij} \left(\sum_{k \in N} c_{ik} x_{ik} + \sum_{m \in N} c_{jm} x_{jm} + \alpha \sum_{k \in N} \sum_{m \in N} c_{km} x_{ik} x_{jm} \right) \quad (30)$$

$$\text{Sujeito a: } (n - p + 1)x_{jj} - \sum_{i \in N} x_{ij} \leq 0, \quad j \in N \quad (31)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1, \quad i \in I \quad (32)$$

$$\sum_{j \in N} x_{jj} = p \quad (33)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in N. \quad (34)$$

A função objetivo (30) minimiza o custo total de transporte aéreo. Os primeiros dois termos de (30) avaliam custos de entrada e saída de fluxos no *hub*. O terceiro termo contabiliza custos associados aos fluxos inter-*hubs*; o parâmetro α reflete o efeito escala de interconexão

de fluxos, pois a idéia é que quanto maior for o fluxo inter-*hubs*, maior será o desconto na taxa de transporte. O grupo de restrições em (31) assegura que nenhum vértice seja atribuído a uma localidade, a menos que um *hub* seja aberto naquele local (i.e., deve-se ter $x_{ij} = 1$, para que algum vértice seja alocado em j), fixando um limite máximo de $(n - p + 1)$ vértices associado a um *hub*, incluindo ele próprio. As restrições em (32) garantem que cada vértice seja atribuído somente a um *hub*, a restrição (33) gera o número fixo de *hubs* e em (34) as variáveis de decisão de tipo binário são definidas.

Posteriormente, esse modelo foi colocado no formato linear inteiro, mediante a introdução de variáveis binárias do tipo X_{ikmj} , que indica que o fluxo entre os vértices *spokes* i e j é feito com passagem pelos *hubs* situados nos vértices k e m , e de um custo associado a essa variável dado pela soma $c_{ik} + c_{km} + \alpha c_{km}$.

2.2.7. Localização Hierárquica

Vamos estudar uma formulação matemática do problema em que as localizações se encadeiam de acordo com níveis, usando como referência o trabalho de Galvão *et al.* (2002), que apresenta uma aplicação da localização hierárquica de serviços perinatais.

Sejam respectivamente $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $J = \{1, 2, \dots, n\}$ e $T = \{1, 2, 3\}$, representações do conjunto de gestantes (separadas por m bairros da cidade), do conjunto de instalações potenciais, do conjunto de serviços oferecidos. Existem três níveis de serviço: ambulatoriais (1), maternidades (2) e clínicas neonatais (3), conforme o grau crescente de risco para os bebês. Sejam W_i o número de gestantes localizadas em $i \in I$, d_{ij} a distância entre o ponto de demanda $i \in I$ e a localização da instalação $j \in J$ e d_{jk} a distância entre a maternidade $j \in J$ e o centro de neonatologia $k \in J$.

Os seguintes parâmetros foram definidos para este modelo: um fator α para explicar diferenças nos custos de viagem ($0 < \alpha \leq 1$), dado que a viagem das pacientes encaminhadas das maternidades a clínicas de neonatologia é por ambulância; ϕ , a proporção de grávidas aconselhadas a ir diretamente a uma clínica de neonatologia para dar à luz; θ , a proporção de gestantes em maternidades encaminhadas a uma clínica de neonatologia; p_1 , p_2 e p_3 , o número máximo de ambulatoriais, maternidades e clínicas de neonatologia, respectivamente, consideradas no modelo; e M um número grande.

Finalmente são definidas as variáveis x_{ij}^t , $t = 1, 2, 3$, para o fluxo de gestantes de $i \in I$ à instalação $j \in J$ para receber o nível de serviço $t \in T$ e x_{jk}^4 para o fluxo de gestantes encaminhadas da maternidade $j \in J$ à clínica de neonatologia $k \in J$ por ambulância; a variável de localização $y_j^t = 1$ indica se uma instalação do nível $t \in T$ é localizada em $j \in J$, e $y_j^t = 0$ caso contrário. O modelo matemático é:

$$\text{Min } Z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij}(x_{ij}^1 + x_{ij}^2 + x_{ij}^3) + \alpha \sum_{j \in J} \sum_{k \in J} d_{jk}x_{jk}^4 \quad (35)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in J} x_{ij}^1 = W_i, \quad i \in I \quad (36)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij}^2 = (1 - \phi)W_i, \quad i \in I \quad (37)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij}^3 = \phi W_i, \quad i \in I \quad (38)$$

$$\sum_{k \in J} x_{jk}^4 = \theta \sum_{i \in I} x_{ij}^2, \quad j \in J \quad (39)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij}^1 \leq M(y_j^1 + y_j^2 + y_j^3), \quad j \in J \quad (40)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij}^2 \leq M(y_j^2 + y_j^3), \quad j \in J \quad (41)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij}^3 + \sum_{k \in J} x_{kj}^4 \leq M y_j^3, \quad j \in J \quad (42)$$

$$y_j^1 + y_j^2 + y_j^3 \leq 1, \quad j \in J \quad (43)$$

$$\sum_{j \in J} y_j^1 \leq p_1 \quad (44)$$

$$\sum_{j \in J} y_j^2 \leq p_2 \quad (45)$$

$$\sum_{j \in J} y_j^3 \leq p_3 \quad (46)$$

$$x_{ij}^1, x_{ij}^2, x_{ij}^3, x_{jk}^4 \geq 0, \quad i \in I, j \in J, k \in J \quad (47)$$

$$y_j^1, y_j^2, y_j^3 \in \{0, 1\}, \quad j \in J. \quad (48)$$

Nesta formulação, a função objetivo (35) minimiza a distância total percorrida. As restrições (36) garantem o serviço de nível 1 para todas as gestantes e as restrições (37) e (38) afirmam que nascimentos ocorrem ou numa maternidade ou numa clínica neonatal (a proporção ϕ de gestantes vai diretamente a clínicas neonatais para dar à luz). As restrições (39) estabelecem que uma proporção θ de gestantes nas maternidades é encaminhada a uma clínica neonatal por ambulância devido a complicações detectadas quando uma mulher está na maternidade. As restrições (40)-(42) afirmam respectivamente que os níveis de serviços 1, 2 e 3 podem ser obtidos nos pontos onde as instalações de nível adequado estão localizadas. As restrições (43) evitam a localização de diferentes tipos de instalações no mesmo local; as restrições (44)-(46) impõem limites orçamentários e as restrições (47) e (48) definem a natureza das variáveis de decisão.

2.2.8. Problema p -centro

Formulado por Hakimi (1964,1965), o problema p -centro é um problema NP-difícil (Kariv & Hakimi 1979). Seu objetivo é minimizar a distância máxima entre clientes e um número fixo de instalações de serviços a serem determinadas. Nesse problema os vértices não têm pesos.

Considerando-se os mesmos parâmetros, exceto os pesos, e as mesmas variáveis de decisão do modelo da p -mediana, e ainda considerando z como uma variável auxiliar, então o problema p -centro é formulado como segue:

$$\text{Min } z \quad (49)$$

$$\text{Sujeito a: } \sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i, \quad (50)$$

$$\sum_j x_{jj} = p, \quad (51)$$

$$x_{ij} \leq x_{jj} \quad \forall i, j, \quad (52)$$

$$z \geq \sum_j d_{ij} x_{ij} \quad \forall i, \quad (53)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j, \quad (54)$$

onde (49) e (53) compõem o objetivo min-max: minimização da distância máxima entre clientes e facilidades. As restrições em (50) certificam que a cada cliente i deve ser atribuída exatamente uma instalação j . A restrição (51) garante que p facilidades são localizadas, (52) assegura que um cliente é atendido num local onde existe uma instalação que oferece o serviço. As restrições (54) são de integralidade.

2.3. O Diagrama de Voronoi

Georgy Voronoi (1868-1908) foi um matemático russo que contribuiu para o estudo denominado de Tesselação de Dirichlet, algo que poderia ser interpretado como construção de mosaicos. Trata-se de um tipo especial de partição do espaço métrico determinado pelas distâncias euclidianas de um conjunto de pontos especificados do espaço. Essa partição do plano com $n > 2$ pontos geradores resulta em polígonos convexos, tais que cada polígono contém exatamente um desses pontos geradores, e ainda pontos interiores que estão mais próximos deste do que qualquer outro ponto gerador.

A Figura 1 ilustra seis pontos geradores e suas correspondentes áreas poligonais contendo os pontos mais próximos de cada ponto gerador. Na Seção 3.1 deste trabalho, denominada localização em um Plano, ilustramos diversos exemplos de aplicações práticas deste conceito em ambientes euclidianos. Igualmente, na Seção 3.2 sobre localização em Redes, mostraremos ambientes em que existem diversas barreiras para o deslocamento, mas que podem ser superadas através do diagrama de Voronoi que oferece uma perspectiva aproximada.

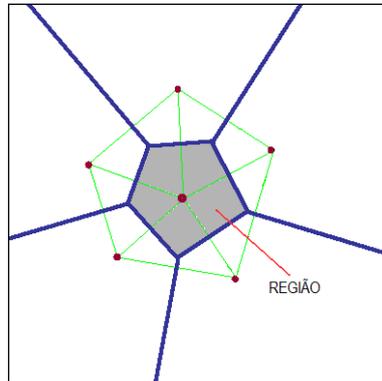


Figura 1. Diagrama de Voronoi. A região em cinza representa a região de abrangência do ponto gerador central.

Baseando-se em Boots e South (1997), o diagrama ordinário de Voronoi pode ser definido especificamente como: seja um conjunto de n instalações, $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, $2 \leq n < \infty$ em um espaço a duas dimensões. Seja $x_j = (x_{j1}, x_{j2})$ a localização da instalação p_j . Suponha cada instalação espacialmente distinta, ou seja, $x_j \neq x_l$ para $j \neq l$, $j, l \in I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Seja $x = (x_1, x_2)$ uma localização arbitrária de um ponto p no plano. Então, a distância euclidiana entre p e p_j é dada por

$$d(p, p_j) = \|x - x_j\| = \sqrt{(x_1 - x_{j1})^2 + (x_2 - x_{j2})^2}.$$

A região $V(p_j) = \{x \mid \|x - x_j\| \leq \|x - x_l\| \text{ para } j \neq l, l \in I_n\}$ é chamada de polígono ordinário de Voronoi da instalação p_j . Certamente, $V(p_j)$ contém todas as localizações que estão mais próximas da instalação p_j do que de nenhuma outra. Por outro lado, o conjunto $\Gamma(P) = \{V(p_1), \dots, V(p_n)\}$ é chamado de diagrama ordinário de Voronoi do conjunto de instalações P .

Okabe e Suzuki (1997) ampliam o entendimento conceitual do diagrama e classificam as instalações em três tipos de acordo com a forma e o tamanho relativo à área da região dada. Se uma instalação é relativamente pequena, tal como um armazém em certa cidade, ele é chamado de *point-like facility*; se a instalação é relativamente longa e muito estreita, tal como uma estrada de ferro, a instalação é denominada de *line-like facility*; e se a área ocupada pela instalação não é negligível, tal como o distrito federal de Brasília, a instalação é denominada de *area-like facility*.

O trabalho de localização de escolas de Teixeira e Antunes (2008) leva em conta a geografia das estradas rurais, e busca agregar escolas de acordo com sua proximidade desta estrada e não com a distância do escolar a alguma escola mais próxima. O trabalho denomina esse processo de alocação de alunos a escolas de *path-assignment* que, obviamente, constitui um exemplo de *line-like facility*.

3. A localização no plano e no espaço

3.1. Localização no plano

Neste tipo de ambiente supõe-se a inexistência de restrições de percurso, de modo que se pode usar a métrica mais conveniente. Exemplos típicos dessa situação são os casos de localizar instalações onde não existem barreiras, como instalações petrolíferas no mar, *hubs* no transporte aéreo ou localizar instalações em terra, porém em locais desprovidos de benfeitorias e barreiras topográficas, ficando-se à vontade para organizar o solo urbano.

Caso particular importante do problema da p -mediana consiste em achar o centro de gravidade de um conjunto I de pontos dotados de ponderação, em que cada ponto $i \in I$ tem coordenadas (x_i, y_i) e peso w_i . De acordo com a nomenclatura adotada, o caso particular do centro de gravidade corresponde ao problema da 1-mediana. Definindo-se $w = \sum w_i$ como o total dos pesos dos pontos, as coordenadas (x_p, y_p) do centro de gravidade podem ser calculadas pelas expressões:

$$x_p = \sum \frac{w_i}{w} x_i \quad \text{e} \quad y_p = \sum \frac{w_i}{w} y_i. \quad (55)$$

Para a localização em um plano há que se adotar uma métrica. Em sistemas geográficos, definem-se vários tipos de métricas decorrentes de modos alternativos do mapeamento da esfera terrestre em um plano, mas as métricas mais adotadas são: a euclidiana e a metropolitana. Sejam os pontos i e j com coordenadas (x_i, y_i) e (x_j, y_j) , a distância de i a j na métrica euclidiana é dada por

$$d_{ij} = \sqrt{(|x_i - x_j|^2 + |y_i - y_j|^2)}, \quad (56)$$

enquanto que na métrica metropolitana a distância é dada por

$$d_{ij} = |x_i - x_j| + |y_i - y_j|.$$

A métrica euclidiana deriva-se da geometria básica desenvolvida por Euclides e está associada ao conhecido teorema de Pitágoras. A esse teorema costuma-se atribuir a propriedade intuitiva de que a distância mais curta entre dois pontos no plano é medida ao longo do segmento de reta que os une.

A métrica metropolitana é mais simples de ser calculada e está coerente com a representação de pontos no plano segundo o método cartesiano. Assim, a distância associada entre dois pontos i e j é dada pela soma dos valores absolutos das diferenças de abscissas e de ordenadas. Autores norte-americanos referem-se a essa métrica como a métrica de *Manhattan*, levando em conta o traçado planejado das ruas da citada ilha. Outros autores sugerem o uso da norma p para definir de modo geral a distância entre dois pontos, dada pela expressão:

$$d_{ij} = \sqrt[p]{(|x_i - x_j|^p + |y_i - y_j|^p)}. \quad (57)$$

Observa-se que a métrica metropolitana equivale a $p = 1$, enquanto que a euclidiana corresponde a $p = 2$. Dadas as distâncias entre diversos pares de pontos e suas coordenadas,

existem estudos que buscam estabelecer o valor mais apropriado de p que melhor aproxime distâncias reais de suas coordenadas cartesianas. Claro que tais estudos relacionam-se com a medição de distâncias em ambientes contendo barreiras e limitações de diversos tipos, como ocorre na medição de distâncias em redes ou na superfície terrestre.

3.1.1. Exemplos de localização no plano

a) Sirenes com alertas

Sirenes foram introduzidas em certos estados norte-americanos como alertas de tornados, visando a mobilização da população e das equipes de socorro. O mesmo acontece em regiões vizinhas a instalações nucleares em caso de acidentes, alertando para evacuação. Segundo O'Kelly e Murray (2004), o trabalho de Kershner (1939) foi o precursor no estudo da distribuição ideal de sirenes para a cidade de Dublin no estado de Illinois, EUA. A disposição mais efetiva das sirenes para cobrir a área urbana é aquela mostrada na Figura 2, dado que o alcance de cada sirene é padronizado em 1320 pés, cerca de 400m, correspondendo ao raio da circunferência circunscrita de cada um dos hexágonos regulares.

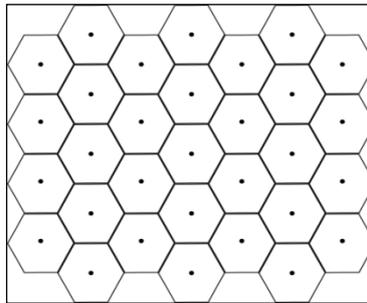


Figura 2. Tipo de abrangência das Sirenes em Dublin, Illinois, EUA.
Fonte adaptada de O'Kelly e Murray (2004).

b) Helicópteros no combate à criminalidade

Estudo de Martins e Pizzolato (2004) realizado para a Polícia do Rio de Janeiro considerou a importância dos helicópteros no primeiro contacto de observação no combate de alguma ação criminosa reportada. Com isso, do alto, a equipe policial avalia as circunstâncias e orienta as equipes terrestres para cheguem à região de modo apropriado. Dados básicos do estudo foram: a relação de bairros, com os seus centróides, suas taxas respectivas de criminalidade, a matriz de distâncias euclidianas entre os diversos centróides e os pontos candidatos a serem heliportos. O resultado do estudo propôs a localização de duas bases de helicópteros, como mostra a Figura 3, tendo no fundo o mapa do Rio de Janeiro com seus distintos bairros, representados pelas poligonais.

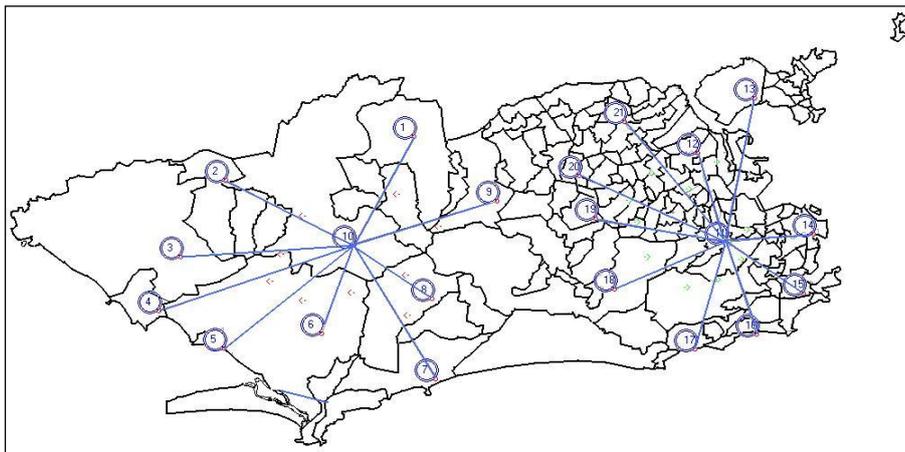


Figura 3. Localização de duas bases de helicópteros no município do Rio de Janeiro.
Fonte: adaptada de Martins e Pizzolato (2004).

c) Plataformas de petróleo no mar

A extração de petróleo na plataforma continental exige a presença de plataformas marítimas que concentram a produção de diversos poços em uma determinada área. Essas instalações estão ligadas a poços submarinos por longos dutos e promovem a separação inicial entre óleo e gás, bem como seus armazenamentos para posterior transferência destes para grandes tanques na costa. Como a plataforma marítima é única para uma dada jazida, a produção de cada poço é diferenciada e, portanto, deseja-se reduzir a metragem dos tubos flexíveis que conduzem o petróleo. Este problema pode ser modelado como 1-mediana no plano.

A dissertação de Estrella (2011) examina o problema logístico básico de localização no plano, como mostra a Figura 4, em que diversos poços estão conectados a uma plataforma, enquanto que Rosa e Ferreira Filho (2006) examinam o mesmo problema sob uma ótica mais complexa que incorpora variáveis tecnológicas, como as variações da produção ao longo da vida útil dos poços.

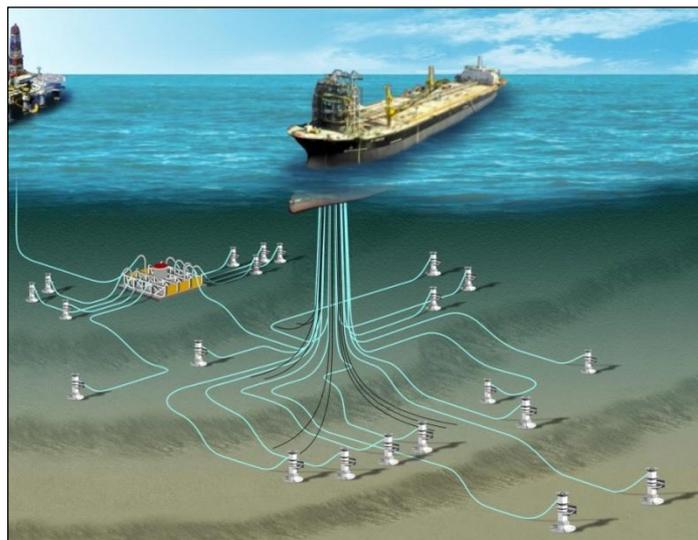
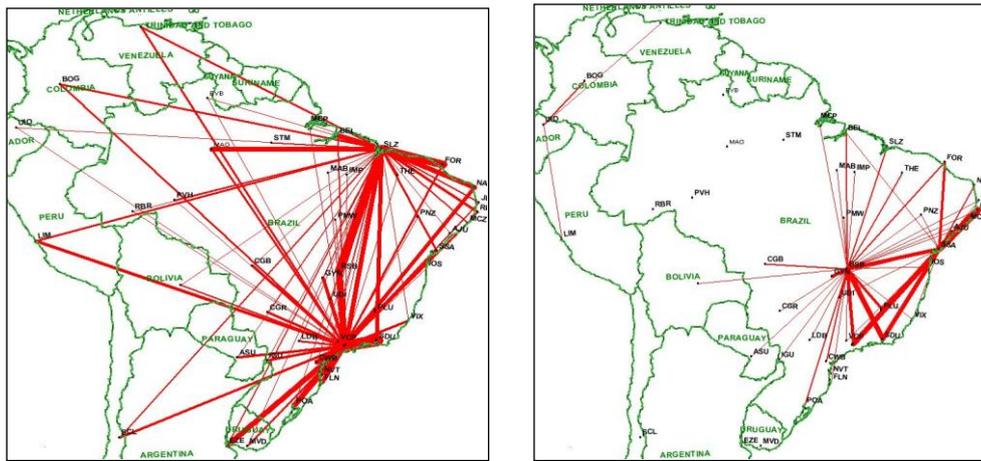


Figura 4. Localização de plataformas marítimas.
Fonte: Estrella (2011).

d) Hubs no transporte aéreo

A tese de doutorado de Figueiredo (2010) conceitua o problema de *hubs* no transporte aéreo e faz uma aplicação para o caso Brasil e outra para o caso América do Sul. São consideradas distâncias euclidianas e são propostos modelos para os casos mais relevantes, com 1, 2 e 3 *hubs*, chamados de *major hubs*, além de definir áreas de influência de pequenos aeroportos regionais, que seriam os *mini hubs*. Foram usados modelos do tipo *p*-mediana para estabelecer zoneamentos geográficos, envolvendo somente os pequenos aeroportos, cujos centros geram os *mini hubs* que se conectam aos demais aeroportos via *major hubs*, como mostra a Figura 5.



(a) (b)
 Figura 5. Localização de *hubs* para América do Sul: (a) *hubs* principais (*major hubs*) e (b) *hubs* menores (*minor hubs*). Fonte: Figueiredo (2010)

e) Máxima cobertura de serviços

Importante variante do modelo da *p*-mediana é o problema de máxima cobertura. Deseja-se localizar um determinado número de instalações de modo a maximizar a quantidade de pessoas beneficiadas, entendendo-se que a cobertura relaciona-se à distância máxima entre um centróide e a instalação de serviço. Tal problema ocorre tipicamente na localização de radares e de instalações de telecomunicações, como antenas, torres de transmissão etc. Uma variante do problema de máxima cobertura é o caso em que se deseja atender toda a demanda e minimizar o número de instalações necessárias.

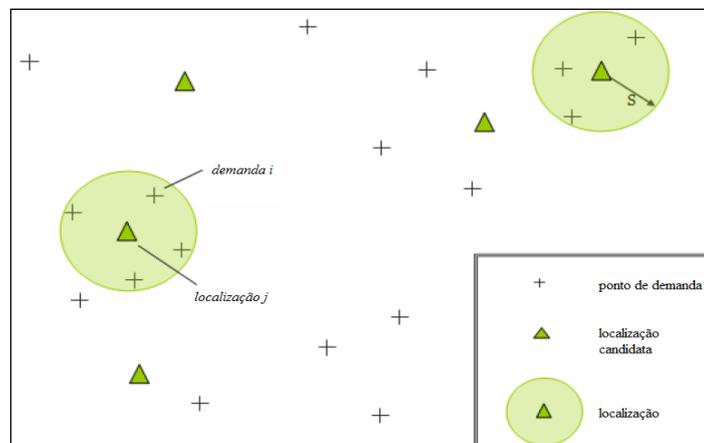


Figura 6. Problema de máxima cobertura de serviços hospitalares. Fonte: Töreyen (2007).

Ambos os problemas podem ser vistos em ambientes euclidianos, caso das telecomunicações, ou em redes, caso das comunidades como discutido acima. Na Figura 6, ilustramos o problema de máxima cobertura para localização de hospitais, estudado por Töreyn (2007), em que dois dentre cinco locais potenciais foram selecionados, de modo a oferecer serviços hospitalares ao maior número possível de clientes, dentro de um raio máximo preestabelecido S .

No México, por exemplo, o problema de máxima cobertura orienta na localização de múltiplos tipos de postos de serviços em regiões rurais, tais como, correios, bancos, agências públicas e escolas, visando atender o maior número possível de pequenas comunidades, diante da impossibilidade de dotar todas as comunidades com todos os serviços oferecidos.

3.2. Localização em redes

Os sistemas de transporte operam ao longo de vias ou rotas específicas que interligadas formam uma rede. Assim, o transporte rodoviário pressupõe a existência de uma rede rodoviária; as linhas de trem exigem a rede ferroviária; o transporte fluvial requer aquavias; o transporte por dutos, as dutovias; as linhas aéreas também envolvem corredores aéreos de tráfego, as aerovias etc. O pedestre, igualmente, nas áreas urbanizadas pelo menos, fica confinado a percorrer distâncias ao longo da rede viária.

Porém, o problema de medir distâncias reais ao longo de redes pode ser tomado como identificar a menor distância ao longo de todos os possíveis caminhos que ligam dois pontos. Diante de uma malha densa, esse problema pode ser muito complexo, podendo-se, como aproximação, usar distâncias euclidianas.

Mesmo assim, esses cálculos são complexos. Uma alternativa é aproximar as distâncias reais por distâncias euclidianas, cometendo erros que podem ser estimados. Para o Estado de São Paulo, usando regressão linear, Novaes (1989) faz uma comparação entre distâncias reais e distâncias euclidianas. Uma das conclusões, é que, para a cidade de São Paulo as distâncias reais equivalem a cerca de 1,366 as distâncias euclidianas, sugerindo uma regra prática para achar distâncias entre dois pontos da cidade, qual seja, medir a distância linear entre os pontos e acrescentar a grosso modo 30%.

3.2.1. Resultados de Hakimi

Os estudos de Hakimi (1964) tiveram o efeito de despertar o interesse pelos estudos de localização de postos de serviços em redes. Esse autor propôs dois teoremas relevantes sobre o tema. O primeiro deles estabelece que, ao se escolher um ponto central em uma rede, contendo vértices e arcos, os candidatos a ponto central deverão ser os vértices da rede. No caso do segundo teorema, em que se escolhe p pontos centrais, problema conhecido como p -mediana, a seleção pode ficar restrita aos N vértices. Assim, no caso da p -mediana, o número de possíveis alternativas é $\binom{N}{p}$, tornando o problema de natureza combinatória.

Para entender a argumentação de Hakimi, suponha que existe um ponto da rede que minimiza a soma ponderada das distâncias mais curtas de todos os vértices a este ponto. A tese proposta é que tal ponto vem a ser um dos vértices da rede. Para tanto, suponha: w_i o peso associado ao vértice i ; d_{ij} a menor distância entre os vértices i e j ; N o conjunto de vértices da rede; r um ponto qualquer da rede (podendo incluir vértices ou arcos).

Deseja-se mostrar que existe um vértice $h \in N$ tal que a distância ponderada de todos os demais vértices a ele é inferior ou igual àquela dirigida a um ponto qualquer r , ou seja,

$$\sum_{i \in N} w_i d_{ih} \leq \sum_{i \in N} w_i d_{ir}$$

Se r é um dos vértices, o teorema está provado. Se r está no arco que conecta dois vértices p e q , então a menor distância desde o vértice i até o ponto r deverá passar pelo vértice p ou pelo vértice q , de acordo com a expressão:

$$d_{ir} = \min (d_{ip} + d_{pr}, d_{iq} + d_{qr}). \quad (58)$$

Sejam K o conjunto de vértices que chegam ao ponto r da forma mais curta pelo vértice p e J o conjunto de vértices que chegam ao ponto r pelo vértice q . Então $d_{kr} = d_{kp} + d_{pr}$; $k \in K$, e $d_{jr} = d_{jq} + d_{qr}$; $j \in J$.

Com apoio da Figura 7, a verbalização da demonstração pode ser feita nos seguintes termos: suponha, por absurdo, que o ponto ideal para localização seja o ponto r , situado no segmento entre os vértices p e q . Para atingir o ponto r , suponha que a maior parte dos clientes passe pelo vértice p . Ao transferir a localização do ponto r para o ponto p , esta massa de clientes se beneficiará com a redução do percurso em d_{pr} , enquanto que os demais clientes, que chegam via o vértice q , antes de atingir r , deverão ampliar seu trajeto no mesmo valor d_{pr} . Como o primeiro grupo é superior ao segundo, há um ganho no sistema em transferir a localização para o vértice p , em contradição à hipótese, e demonstrado o teorema. Para a demonstração original sugere-se buscar o citado Hakimi (1964) ou ReVelle *et al.* (1970).

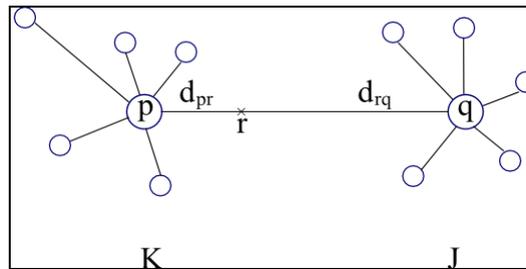


Figura 7. Ilustração dos conjuntos K e J .

3.2.2. Exemplos de localização em redes

a) Escolas municipais de Nilópolis, Rio de Janeiro

Pizzolato *et al.* (2004) usam o modelo da p -mediana para propor as localizações ideais de escolas no município de Nilópolis, Rio de Janeiro, supondo sempre que o aluno prefere a escola mais próxima de sua residência. Nilópolis possuía, segundo o Censo de 1991, uma população de quase 160 mil pessoas, com 18,5% de jovens na idade 7-14 anos. No estudo foram identificados 128 setores e 22 escolas, conforme a Figura 8, cujos polígonos indicam os setores censitários do município e os pontos as escolas públicas (estaduais e municipais) existentes. O estudo também usou os dados populacionais determinados pelo IBGE, com a quantidade de jovens na faixa etária 7-14 anos em cada setor censitário. A seguir, foram medidas as distâncias euclidianas entre cada setor e seus vizinhos mais próximos, enquanto o algoritmo de Floyd-Warshall completou a matriz de distâncias para todos os pares de pontos.

O estudo se desenvolve em duas partes. Na primeira, faz-se uma avaliação da situação existente e se mostra, com o apoio de cores, as escolas do município, e respectivas regiões, com maior escassez de vagas e aquelas com excesso de vagas. Para melhor entender a parte (a), considere o setor censitário 89, onde existe uma escola. Sabe-se a capacidade dessa escola e a menor distância identifica os setores em que ficam os demandantes dessa escola, pelo critério proximidade. Comparando ambos os números, resulta um desequilíbrio positivo ou negativo, representado por cores. Laranja, vermelho, roxo e negro seriam indicativos de situações progressivamente piores, enquanto que azul, verde e suas nuances indicariam situações mais favoráveis.

A segunda parte do estudo aplica o método da p -mediana e determina aonde as escolas deveriam estar, o que corresponderia ao conceito de zoneamento escolar, e quais as demandas a elas associadas. A Figura 8 (b) indica esse zoneamento ideal em Nilópolis para 22 medianas, mostrando, com relação à figura (a), um melhor equilíbrio no tamanho de cada zona escolar. As tonalidades mostradas na figura decorrem da existência prévia de diversas escolas e as diferenças entre capacidade de cada escola já eventualmente existente e a demanda escolar gerada naquele zoneamento, usando os mesmos critérios de cores.

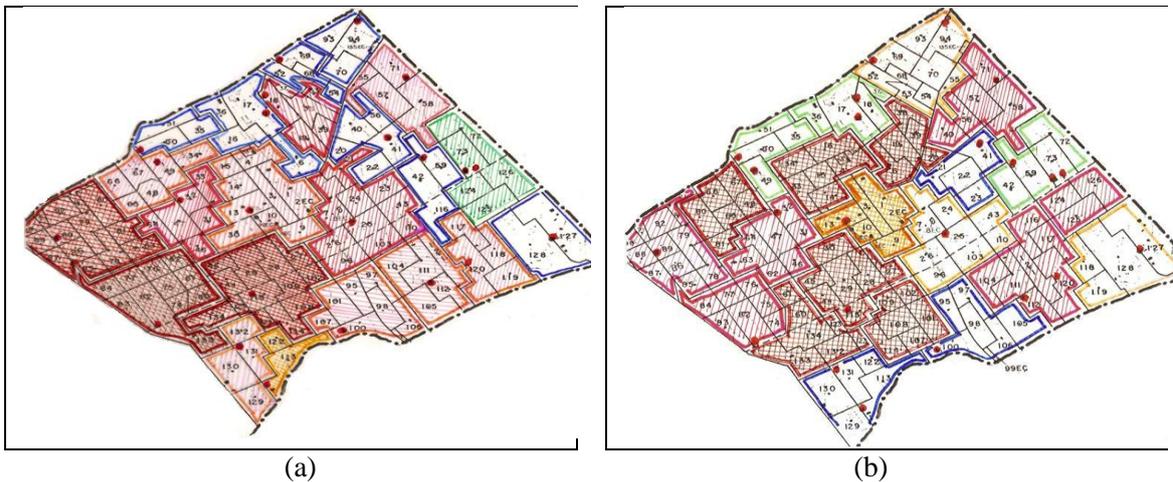


Figura 8. Localização de Escolas em Nilópolis, RJ. Caso (a): avaliação da situação atual; caso (b): Proposta de zoneamento escolar. Fonte: Pizzolato *et al.* (2004).

b) Escolas públicas de Guaratiba, Rio de Janeiro

Menezes (2010) usa os modelos da p -mediana capacitado e de máxima cobertura para propor as localizações de novas escolas públicas na região de Guaratiba, Rio de Janeiro, conforme expectativa de crescimento da população para os anos 2015 e 2020, apoiando-se na ferramenta *Service Area e Closest Facility do ArcGis Network Analyst*, a qual reconhece distâncias em uma rede, com todas as barreiras existentes e avalia a cobertura oferecida por cada escola, em função de um limite de distâncias, tipo 1.000, 2.000 ou 3.000 metros, entre ela e a residência do aluno.

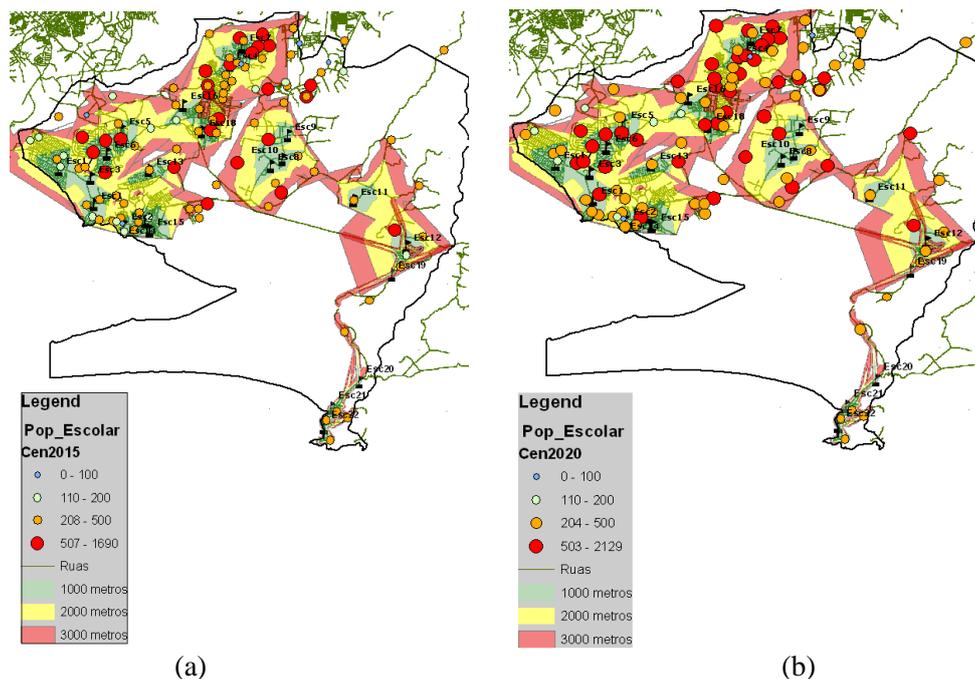


Figura 9. Resultados da localização de unidades escolares para 2015 (a) e 2020 (b).
Fonte: Menezes (2010)

A geografia delimita as áreas utilizadas na aplicação da metodologia de avaliação e localização de novas escolas municipais da Região Administrativa do município de Guaratiba, já que forma “ilhas” de concentração da população. O primeiro modelo, que considera a restrição de capacidade das escolas, mostrou que seriam necessárias as construções de 21 escolas municipais no ano 2015 e mais 7 até o ano 2020 para o atendimento pleno da população em idade escolar. O segundo modelo considera que 80% da população escolar deve estar coberta por uma escola no limite máximo de 1.500 metros, sem restrição de capacidade. Com isso, 12 escolas municipais deverão ser construídas, validando os resultados já obtidos. O resultado é mostrado na Figura 9.

c) Unidades de educação infantil em Cascavel, Paraná

Lobo (2003) desenvolveu uma metodologia baseada na p -mediana para dimensionar e localizar unidades de educação infantil na cidade de Cascavel – PR. A cidade possui 126 setores censitários, e o estudo leva em conta o crescimento demográfico e propõe 46 medianas, de modo a limitar os deslocamentos e equalizar a distribuição das unidades pela cidade sem deixar áreas desprovidas e outras com um número alto de unidades. As áreas de abrangência de cada escola são determinadas mediante os Diagramas de Voronoi que simplificam, como afirmado anteriormente, a determinação de distâncias. A Figura 10(a) indica os setores censitários e a localização das medianas propostas, enquanto a Figura 10(b) mostra as regiões de abrangência de cada unidade.

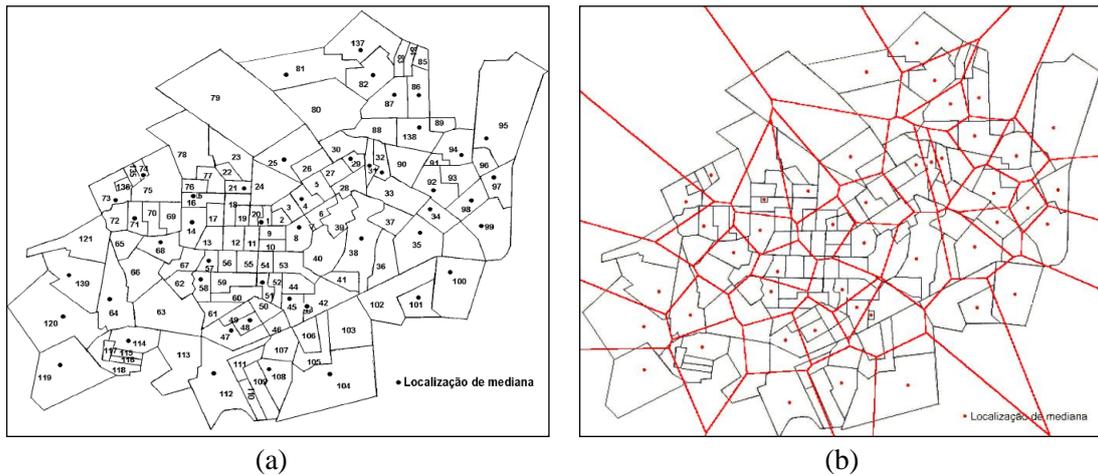


Figura 10. Localização de Escolas em Cascavel, PR. Com 126 blocos censitários (a) e uma solução possível para o problema com 46 medianas (b).
Fonte: Lobo (2003).

d) Shopping Centers na Barra da Tijuca, Rio de Janeiro

Trabalho sobre localização de *shopping centers* de vizinhança, que são shoppings menores e direcionados às pequenas compras de rotina, para as quais a distância mais curta torna-se um atrativo determinante, foi realizado no bairro Barra da Tijuca, Rio de Janeiro/RJ. O estudo pretendia usar o modelo da *p*-mediana com dados dos setores censitários da região. Entretanto, diante das particularidades geográficas do bairro, e com vistas à validação prática do estudo, foi empregada uma metodologia heurística específica inspirada nos diagramas de Voronoi. O estudo de Rozental e Pizzolato (2009) propõe a existência de seis *shopping centers* de vizinhança e sugere os pontos ideais para suas instalações, na Barra da Tijuca, RJ, conforme ilustrado na Figura 11. A parte (a) da Figura 11 indica a posição dos centróides, definidos em razão do agrupamento de um certo número de setores censitários, pois na região predominam grandes condomínios e, nestes podem estar definidos múltiplos setores. A parte (b) da Figura 11 aponta a solução proposta no estudo.

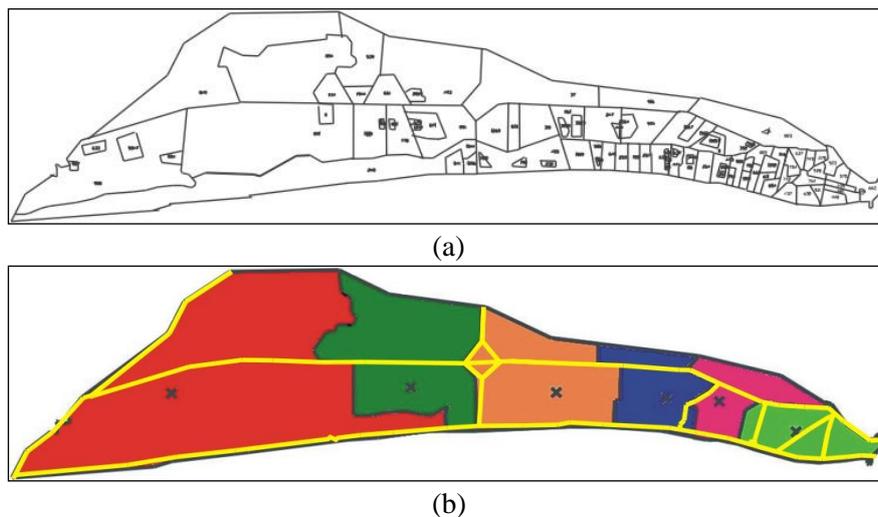


Figura 11. Localização de Shopping Centers, RJ.
Caso (a): com seus setores censitários; caso (b): uma possível solução com 6 medianas.
Fonte: Rozental e Pizzolato, (2009)

e) Localização de maternidades

O trabalho de Galvão *et al.* (2002) apresenta uma aplicação do problema de localização na área de saúde no município do Rio de Janeiro. A proposta do trabalho é localizar maternidades usando um modelo hierárquico, precisamente aquele descrito na Seção 2.2.6. A hierarquia surge ao levar em conta a existência de partos normais em ambulatórios, partos de médio risco em maternidades, e partos de alto risco em centros de neonatologia.

Além dessa aplicação em saúde, aproveitamos para citar dois trabalhos que também usam processos hierárquicos, a saber: Iannoni e Morabito (2008), que otimiza a localização das bases de ambulâncias e o dimensionamento das suas regiões de cobertura em rodovias do estado de São Paulo; e o já citado Teixeira e Antunes (2008), sobre escolas em Portugal.

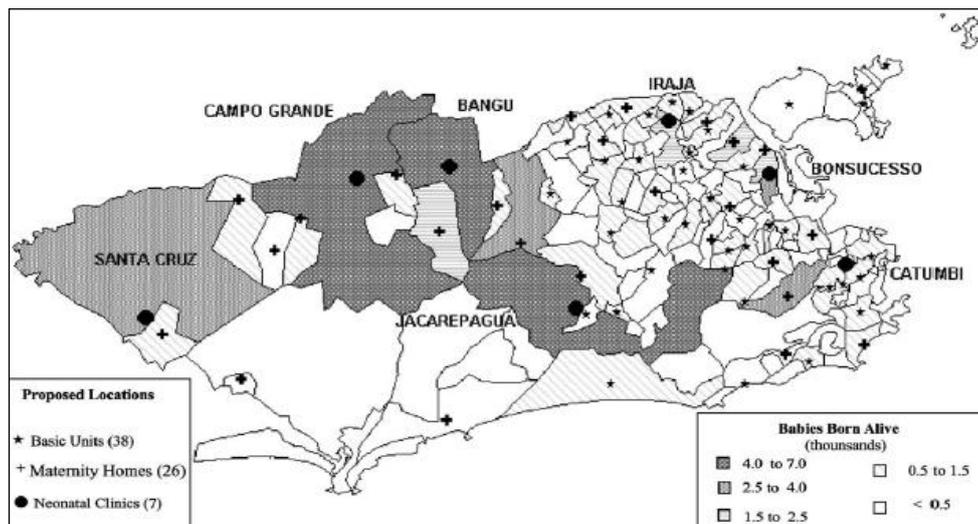


Figura 12. Distribuição espacial de localizações de maternidades.
Fonte: Galvão *et al.* (2002).

f) Localização de centros de distribuição

Ferreira *et al.* (2008) estudam a adaptação e aplicação de metaheurísticas *Simulated Annealing* (SA) e *Iterated Local Search* (ILS) para resolver um problema hipotético de localização de instalações no território brasileiro, usando o modelo *p*-mediana capacitado. Nesse trabalho, foram realizados testes considerando a instalação de um, dois e três centros de distribuição (CD), considerando para o problema todas as cidades do Brasil com mais de 90.000 habitantes, ou seja, 284 localidades.

A tese de Arakaki (2002) discute o problema de máxima cobertura, além do problema de localização capacitado. No contexto de máxima cobertura, o modelo consiste em escolher locais para instalar facilidades de forma que o maior número de clientes ou usuários seja coberto, e em determinar em qual facilidade cada cliente deverá ser atendido. O objetivo, portanto, é maximizar a cobertura de uma determinada população em relação a um dado equipamento coletivo, de modo a estabelecer um raio de cobertura fora do qual o usuário deixa de ser coberto por esse equipamento, buscando assegurar que o maior número de usuários seja atendido.

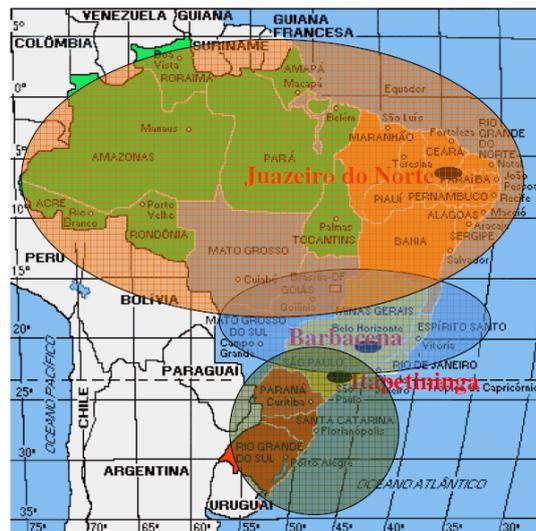


Figura 13. Localização de 3 centros de distribuição: Juazeiro do Norte, Barbacena e Itapetininga.
 Fonte: Ferreira *et al.* (2008)

g) Unidades de postos de saúde em Ácora, distrito da província de Puno, Peru.

Sotomayor Alzamora *et al.* (2011) usam o modelo da p-mediana para propor a localização de diferentes categorias de estabelecimentos de saúde no distrito de Ácora, com uma projeção para os próximos 5 anos. O estudo leva em conta o crescimento demográfico e propõe 17 medianas de 20 localizações candidatas, obtidas das mais de 115 pequenas comunidades existentes. As áreas de abrangência são determinadas mediante os Diagramas de Voronoi de modo a simplificar a determinação de distâncias. A Figura 11(a) indica as pequenas comunidades, e a Figura 11(b) mostra as regiões de abrangência de cada unidade.

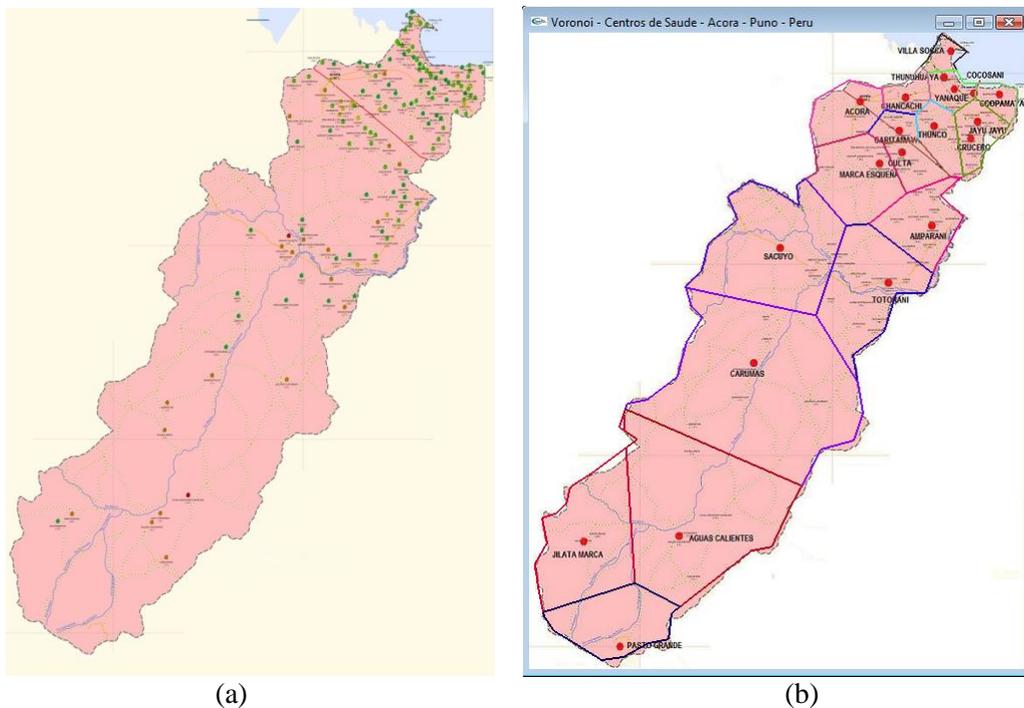


Figura 11. Localização de estabelecimentos de Saúde em Ácora, Puno, Perú; Caso (a): as pequenas comunidades; caso (b): uma solução possível para o problema com 17 medianas.
 Fonte: Sotomayor Alzamora *et al.* (2011).

4. Métodos de solução

Segundo Reese (2006), os métodos de solução para o problema de localização são classificados como algoritmos de aproximação, de enumeração, baseados em Teoria de Grafos, heurísticas, baseados em formulações inteiras e reduções, em relaxação linear, metaheurísticas (VNS, heurística de concentração, algoritmos genéticos, GRASP, *scatter search*, *tabu search*, *simulated annealing*, redes neurais), e relaxação *surrogate*.

Devido à grande variedade de métodos de solução existentes para resolver o modelo da p -mediana e suas variantes, somente alguns métodos serão abordados brevemente aqui. Inicialmente, serão examinados métodos heurísticos aplicados ao problema da p -mediana e, mais adiante, os métodos exatos. Cabe notar que em todo problema de localização há informações não incorporadas aos modelos, como preferências, subjetividade e outros elementos intangíveis. Assim, os métodos heurísticos passam a ser muito apreciados pela simplicidade de se obter, ou de se impor, soluções alternativas e incorporar preferências, o que nem sempre é viável nos métodos exatos. Além disso, os métodos heurísticos se baseiam em regras de simples programação, tornando mais econômico o seu desenvolvimento, embora não garantam que a solução obtida seja ótima. Outra categoria desses métodos, brevemente citados, são as metaheurísticas. Certamente, há que ponderar a importância de uma solução ótima comparativamente a uma solução razoavelmente boa.

4.1. Métodos heurísticos para p -mediana

Sendo o problema de localização um problema combinatório, o uso de métodos heurísticos passa a ser atrativo, e muitas vezes o único viável para se obter uma solução em tempo polinomial. Como notado antes, heurísticas podem ser desejáveis quando da existência de restrições não explícitas ou preferências subjetivas, decorrentes do uso de hipóteses simplificadoras na construção do modelo. Cabe repetir que heurísticas são desenvolvidas caso a caso, em função do problema em estudo. Segue-se uma breve descrição dos métodos heurísticos tradicionais e referências sobre outros.

4.1.1. Método guloso

Corresponde ao termo em inglês *greedy algorithm*. Suponha primeiramente que se deseja resolver um determinado problema de localização de uma instalação, $p = 1$.

Seja $r^1 \in X$ o ponto escolhido, ou seja:

$$\sum_{x_i \in X} w_i d(x_i, r^1) \leq \sum_{x_i \in X} w_i d(x_i, y), \quad \forall y \in X$$

se a essa solução r^1 for acrescentada uma nova instalação no vértice x_q , há pelo menos uma redução de $w_q d(x_q, r^1)$ no custo total, pois esta parcela do custo torna-se zero. Portanto, a melhor escolha para uma segunda instalação seria aquela que mais reduz de forma imediata a função objetivo, ou seja,

$$w_q d(x_q, r^1) = \max_{x_i \in X} w_i d(x_i, r^1).$$

Assim, a solução para duas instalações formaria o conjunto $X_2 = \{r^1, x_q\}$. Para acrescentar uma terceira instalação, escolhe-se o vértice x_s se

$$w_s d(x_s, X_2) = \max_{x_i \in X} w_i d(x_i, X_2).$$

Portanto, a solução para três instalações seria o conjunto $X_3 = \{r^1, x_q, x_s\}$ e o procedimento continua até alcançar p medianas. Evidentemente, é possível melhorar a solução

obtida por esse método se, ao escolher mais uma mediana, for feita uma reavaliação das medianas anteriormente escolhidas.

4.1.2. Algoritmo de Maranzana

Esse algoritmo, proposto por Maranzana (1964), realiza basicamente buscas na vizinhança para resolver o problema da p -mediana, a saber:

Passo 1 Selecione arbitrariamente p vértices de $X : r^1, \dots, r^p$

Passo 2 Particione todos os vértices $x_j \in X$ em p subconjuntos X^1, X^2, \dots, X^p tais que $r^k \in X^k$ e $x_j \in X^k$ se $d(x_j, r^k) = \min_{i=1, \dots, p, i \neq k} \{d(x_j, r^i) | r^i \in X^i\}$;

Passo 3 Determine o centro de gravidade \bar{x}_i de cada conjunto X^i ;

Passo 4 Se $r^i = \bar{x}_i$ para todos os conjuntos X^i , pare. Os valores de r^i e as partições de X^i são as soluções procuradas. Caso contrário, faça $r^i \leftarrow \bar{x}_i$ e retorne ao passo 2.

Cabe notar que, a cada mudança de centro de gravidade, $r^i \leftarrow \bar{x}_i$, há uma redução da solução global, porque \bar{x}_i substitui o centro de gravidade r^i do subconjunto X^i se $\sum_{x_i \in X} w_i d(x_i, \bar{x}_i) < \sum_{x_i \in X} w_i d(x_i, r^i)$. Portanto, cada retorno ao Passo 2 implica em uma redução no valor Z proporcionada pela solução corrente.

4.1.3. Algoritmo de Teitz e Bart

É comumente conhecido como o método de substituição de vértices e consiste em:

Passo 1. Selecione arbitrariamente p vértices $\{r^1, r^2, \dots, r^p\}$ para compor o conjunto X_p de raízes. Essas raízes representam centros de gravidade de cada um dos p agrupamentos.

Passo 2. Particione todos os vértices $x_j \in X$ entre os p subconjuntos X^1, X^2, \dots, X^p de tal modo que $r^k \in X^k$ e $x_i \in X^k$ se $d(x_i, r^k) = \min_{j=1, \dots, p} d(x_i, r^j)$.

Passo 3. Considere o par (r^k, x_b) onde $k = 1, \dots, p$ e $x_b = x_1, \dots, x_n$, com $x_b \neq \{r^1, \dots, r^p\}$ e tente substituir r^k por x_b no conjunto de raízes. Seja $X'_p = X_p - \{r^k\} + \{x_b\}$ o novo conjunto de raízes.

Se $\sum_{x_i \in X} w_i d(x_i, X'_p) < \sum_{x_i \in X} w_i d(x_i, X_p)$, faça $r^k \leftarrow x_b$ e retorne ao passo 2, com o novo conjunto X'_p . Caso contrário, o método termina e o conjunto de raízes X_p é escolhido.

4.1.4 Heurísticas e metaheurísticas

Um exemplo de método heurístico para resolver o modelo da p -mediana é encontrado em Pizzolato (1994), enquanto outros exemplos podem ser obtidos nas resenhas de Brandeau e Chiu (1989) e em Reese (2006). Ao se propor um novo método heurístico exige-se uma acurada avaliação de seu desempenho, a qual é usualmente feita de modo comparativo ao algoritmo de Teitz e Bart, apresentado acima, de modo a identificar valores relativos quanto à qualidade das soluções obtidas e dos tempos de computação encontrados.

Outra vertente de métodos heurísticos emerge com as metaheurísticas, apoiadas em extensas computações. Enquanto as heurísticas tradicionais baseiam-se no uso de conhecimentos e relações lógicas do problema específico na busca de uma solução satisfatória, as metaheurísticas buscam primordialmente explorar soluções candidatas privilegiando recursos informáticos, porque são desenvolvidas para resolver mais de uma classe de problemas, não se restringindo ao problema específico da p -mediana. Apesar de sua grande importância atual na resolução de problemas de localização, está fora do escopo deste trabalho abordar metaheurísticas existentes para resolver o problema de localização, porém citamos algumas, tais como, por exemplo, algoritmos genéticos (Lorena & Narciso, 2001), colônia de formigas (Randall, 2008), GRASP (Resende & Werneck, 2004), *simulated annealing* (Almeida

& Senne, 2010), *tabu search* (Ferreira Filho & Galvão, 1998), VNS (Fleszar & Hindi, 2008). Outras referências podem ser obtidas, por exemplo, nos trabalhos de Reese (2006) e Mladenović et al. (2007).

4.2. Métodos exatos para a p -mediana

Um método exato, quando aplicado para resolver o problema da p -mediana, encontra uma solução garantidamente ótima. Por conta da tal garantia, o tempo de execução de um algoritmo exato é em geral bem maior que o tempo de execução de um método heurístico. Para usuários sem conhecimento de uma linguagem computacional, é indicado o uso de um *software* especializado em programação matemática que tenha instalado um método exato como, por exemplo, o *branch-and-bound*.

A opção por aplicar um método exato depende de vários fatores, tais como a importância de se obter uma solução ótima, a disponibilidade de recursos computacionais e o tamanho do problema. Sabe-se que a variedade de problemas associados à localização apresenta, em geral, pequenas alterações na estrutura de seus modelos. Assim, problemas distintos podem ser resolvidos sem muito esforço adicional por métodos exatos, ao contrário de heurísticas, construídas especificamente para cada problema em particular.

Além disso, no modelo da p -mediana verifica-se que as funções objetivo e das restrições são lineares, e as variáveis são inteiras do tipo 0-1. Vamos então abordar algumas metodologias de resolução destes problemas, mantendo-se o foco no problema da p -mediana. Por limitação de espaço, as duas primeiras metodologias serão descritas brevemente, sugerindo-se ao leitor interessado buscar textos especializados, notadamente Wolsey (1998) e Salkin (1975), ou introdutórios, como Pizzolato e Gandolpho (2009).

4.2.1. *Branch-and-bound* (B&B)

É o método mais usado para resolver problemas lineares inteiros, segundo Wolsey (1998). Sua metodologia básica é a de enumeração implícita, onde sucessivos limites para os valores da função objetivo são usados de modo a reduzir o número de enumerações, e, assim, garantir a obtenção de uma solução ótima em tempo razoável.

Limites para o valor da função objetivo são obtidos por meio da relaxação linear. Se o objetivo do problema é de maximizar, então obtém-se primeiramente um limite superior resolvendo o problema de programação linear, em que as restrições de integralidade das variáveis são relaxadas. Se a solução ótima obtida é uma solução inteira, então essa solução vem a ser uma solução ótima do problema. Caso contrário, o algoritmo segue dividindo a região viável corrente usando uma das variáveis da solução do problema relaxado que tem valor fracionário. Cada subproblema é definido pela interseção da região viável corrente com um dos semi-espacos definidos em função da parte inteira da variável fracionária escolhida. Com isso, temos que investigar dois subproblemas resultantes, com a certeza de que as soluções das relaxações desses subproblemas, caso existam, fornecerão limites superiores para o problema menores que o limite superior corrente, caso o problema não seja degenerado. Por outro lado, os limites inferiores para os valores da função objetivo são determinados quando encontramos subproblemas viáveis. Lembramos que alguns subproblemas gerados podem ser inviáveis, diminuindo o esforço da enumeração. O algoritmo termina quando a diferença entre os limites superior e inferior for menor que uma tolerância pré-determinada.

À medida que o algoritmo *B&B* avança, tem-se que escolher um subproblema ainda não resolvido para examiná-lo. Existem muitas técnicas possíveis tanto para escolher o subproblema a ser resolvido quanto para decidir como resolvê-lo, sabendo que a única diferença entre o subproblema corrente e o subproblema que o originou é uma restrição simples sobre limite superior ou inferior de uma variável; é grande a contribuição de trabalhos científicos nessa linha.

4.2.2. Método dos planos de corte.

A idéia geral dos métodos de planos de corte para resolver problemas consiste em acrescentar progressivamente uma restrição ao conjunto viável de modo a aproximar a região viável do problema à envoltória convexa dos pontos inteiros viáveis. As restrições a serem adicionadas seguem certos conceitos, primeiramente introduzidos por Dantzig e mais tarde explorados e desenvolvidos por Chvátal e Gomory, chamados de cortes válidos. Ao adicionarmos um corte válido ao problema, temos como vantagem resolver um subproblema que apresenta limite para o valor da função objetivo melhor que o limite corrente. Porém, a desvantagem associada é a dificuldade crescente em resolver subproblemas que apresentam cada vez mais restrições, exigindo do algoritmo escolhido um maior esforço computacional.

4.2.3. Método lagrangeano.

Esse método, usado para resolver problemas complexos com um grande número de restrições, está fundamentado em resolver uma relaxação lagrangeana do problema linear inteiro. Identificadas as restrições difíceis do problema, elas são incorporadas à função objetivo juntamente com seus multiplicadores de Lagrange, resultando em um subproblema cuja solução fornece um limitante para o problema original. Porém, o subproblema resultante agora apresenta, além das variáveis do problema, novas variáveis que são os multiplicadores de Lagrange. Para contornar tal dificuldade, resolve-se o problema dual associado relativamente mais simples, que é um problema de otimização cuja função objetivo é linear por partes, o qual exige um método de solução capaz de lidar com a não diferenciabilidade da função, além de outras dificuldades inerentes. Usualmente o método dos subgradientes é aplicado, Beasley (1993). Cabe notar que:

- O processo de levar as restrições complicadoras para a função objetivo, juntamente com os multiplicadores de Lagrange associados, chama-se relaxação lagrangeana.
- O problema obtido com a relaxação lagrangeana é um problema mais simples que o original. A experiência prática com a relaxação lagrangeana indica que ela produz bons limites inferiores com baixo custo computacional.
- Em problemas de minimização, a relaxação linear e a relaxação lagrangeana produzem limites inferiores ao passo que métodos heurísticos podem produzir limitantes superiores.

Seja o problema de programação inteira formulado como:

$$\begin{aligned}
 (P) \quad & \text{Min } Z = cx \\
 & \text{sujeito a:} \\
 & \quad Ax \geq b \\
 & \quad Bx \geq d \\
 & \quad x \in \{0, 1\} \text{ ou } x \in \mathbb{Z}^+.
 \end{aligned}$$

A relaxação lagrangeana, com respeito ao conjunto de restrições $Ax \geq b$, é dada por

$$\begin{aligned}
 (PR) \quad & \text{Min } cx + \lambda(b - Ax) \\
 & \text{sujeito a:} \\
 & \quad Bx \geq d \\
 & \quad x \in \{0, 1\},
 \end{aligned}$$

onde $\lambda \geq 0$ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange. Nota-se que $cx + \lambda(b - Ax) \leq cx$, pois $\lambda \geq 0$ e $b - Ax \leq 0$, e com isso um limitante inferior para (P) pode ser obtido.

O problema de relaxação lagrangeana pode ser resolvido por mais de um método. Em particular, o método Dual Lagrangeano consiste em encontrar o máximo destes limites

inferiores. Idealmente, a solução ótima do problema (*PR*) dada pelo Dual Lagrangeano é igual à solução do problema (*P*).

Galvão (1993) aplica o método lagrangeano para resolver o problema da *p*-mediana ligeiramente distinto do apresentado antes, na Seção 2.1. As diferenças ficam por conta das restrições (60), em que se permite que os centróides *i* sejam atendidos por facilidades em mais de um vértice, e da presença das variáveis *y_j*, representando as variáveis *x_{jj}*, ou seja,

$$\text{Min } Z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \quad (59)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \geq 1, \quad i \in I \quad (60)$$

$$\sum_{j \in J} y_j = p \quad (61)$$

$$x_{ij} - y_j \leq 0, \quad i \in I, j \in J \quad (62)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J \quad (63)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j \in J. \quad (64)$$

Galvão atribui ao trabalho de Narula *et al.* (1977) a relaxação das restrições (60), usando o multiplicador λ_i para cada restrição em (60) e produzindo o seguinte problema de relaxação Lagrangeana:

$$\text{Min } Z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (c_{ij} - \lambda_i) x_{ij} + \sum_{i \in I} \lambda_i$$

Sujeito a: (61)-(64).

De acordo com o problema resultante, as variáveis *x_{ij}* dependeriam unicamente dos seus coeficientes, *c_{ij} - λ_i*, de modo que a minimização é alcançada trivialmente mediante à análise: se (*c_{ij} - λ_i*) > 0, faz-se *x_{ij}* = 0, senão, se (*c_{ij} - λ_i*) < 0, faz-se *x_{ij}* = 1.

Além disso, as restrições em (62) estabelecem os valores *y_j* = 1 caso *x_{ij}* = 1 e *y_j* = 0 ou *y_j* = 1 caso *x_{ij}* = 0. Após esse processamento, inicia-se uma nova fase no procedimento que consiste em se buscar valores de λ_i que possam melhorar a solução obtida. Isso pode ser alcançado pelo método de otimização de subgradientes, não explicitado aqui, mas para o qual recomenda-se ao leitor consultar Reese (2006) e Beasley (1993).

5. Conclusões

A proposta deste trabalho foi fazer uma revisão de aplicações de problemas de localização com foco no modelo da *p*-mediana e suas variantes, destacando preferencialmente os trabalhos pioneiros dessas formulações em âmbito nacional. Foram apresentados estudos voltados para a resolução de problemas que afetam diretamente à sociedade de modo geral, como localização de escolas, unidades de educação infantil, recursos para a segurança pública, localização de hubs, maternidades e muitos outros. Alguns exemplos práticos, aqui apresentados, usaram a técnica de Diagramas de Voronoi para destacar as regiões de abrangências das medianas. Por limitações de espaço, alguns métodos de solução foram brevemente apresentados, apontando-se unicamente os aspectos mais fundamentais, juntamente com indicações bibliográficas consagradas.

Por outro lado, tanto a abrangência dos casos apresentados como a abundância de referências oferecem ao leitor uma forte motivação para levar adiante estudos aplicados a diversos setores de interesse social ou empresarial.

Referências

- ALMEIDA, W.G., SENNE, E.L.F. (2010). [Metaheurística híbrida com busca por agrupamento aplicado ao problema de localização de hubs com restrições de capacidade](#). *XLII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO) 2010*, Bento Gonçalves - RS.
- ARAKAKI, R.G.I. (2002). Heurística de localização-alocação para problemas de localização de facilidades. *Tese de Doutorado em Computação Aplicada, INPE - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais*, São José dos Campos, São Paulo, Brasil.
- BEASLEY, J.E. (1993). Lagrangean Heuristics for Location Problems. *European Journal of Operational Research*, 65, 383-399.
- BOOTS, B. e SOUTH, R. (1997). Modeling Retail Trade Areas Using Higher-Order, Multiplicatively Weighted Voronoi Diagrams. *Journal of Retailing*, 73 (4), 519-536.
- BRANDEAU, M.L. e CHIU, S.S. (1989). An Overview of Representative Problems in Location Research. *Management Science*, 35, 645-674.
- BUARQUE, C. (1986). Avaliação Econômica de Projetos. *Campus 2ed.*, Rio de Janeiro, 266.
- CAMPBELL, J.F. (1994). Integer Programming Formulations of Discrete Hub Location Problems. *European Journal of Operational Research*, 72, 387-405.
- CURRENT, J., DASKIN, M. e SCHILLING, D. (2004). Discrete Network Location Models em Dreznér, Zvi e Hamacher, H. W. Facility Location: Applications and Theory. *Springer Verlag*, 81-121.
- DASKIN, M.S. (1995). Network and Discrete Location: Models, Algorithms, and Applications. *John Wiley & Sons*, New York.
- DREZNER, Z. (editor) (1995). Facility Location: A Survey of Applications and Methods. *Springer*, New York.
- DREZNER, Z. e HAMACHER, H.W. (editors) (2004). Facility Location: Applications and Theory. *Springer*, New York.
- DREZNER, Z., KLAMROTH, K., SCHÖBEL, A. e WESOLOWSKY, G.O (2004). The Weber Problem, em DREZNER, Z. e HAMACHER, H.W. Facility Location: Applications and Theory. *Springer*, New York, 1-36.
- ESTRELLA E. (2011). Localização de Plataformas Marítimas. *Dissertação de Mestrado, PUC/Rio*, RJ.
- FARAHANI, R.Z. e HEKMATFAR (editors) (2009). Facility Location: Concepts, Models, Algorithms and Case Studies: Contributions to Management Science. *Physica-Verlag Heidelberg*.
- FEO, T.A. e RESENDE, M.G.C. (1995). Generalized Random Adaptive Search Procedure. *Journal of Global Optimization*, 6, 109-133.
- FERREIRA FILHO, V.J.M. e GALVÃO, R.D. (1998). A tabu search heuristic for the concentrator location problem. *Location Science*, 6, 189-209.
- FERREIRA G.C., SOUZA M.J. e DUTRA V.G. (2008). Metaheurísticas Simulated Annealing E Iterated Local Search Aplicadas Ao Problema De P-Mediana Capacitado: Um Estudo De Caso. *ENEGEP*, RJ.
- FIGUEIREDO, R.M.A de (2010). Hub and Spoke Strategy for Air Transportation Networks: A Contribution to Model Cases in South America and Brazil. *Tese de Doutorado, PUC/Rio*, RJ.
- FLESZAR, K. e HINDI, K.S. (2008). An effective VNS for the capacitated p -median problem. [European Journal of Operational Research](#), 191, 612-622.
- GALVÃO, R.D. (1993). The use of Lagrangean Relaxation in the solution of uncapacitated facility location problems. *Location Science*, 1 (1), 57-99.
- GALVÃO, R.D., ACOSTA, L.G.E. e BOFFEY, B. (2002). A Hierarchical Model for the Location of Perinatal Facilities in Municipality of Rio de Janeiro. *European Journal of Operational Research*, 138, 495-517.

- HAKIMI S. (1964). Optimum Locations of Switching Centers and the Absolute Centers an Median of a Graph. *Operation Research*, 12, 450-459.
- IANNONI, A.P. e MORABITO, R. (2008). Otimização da localização das bases de ambulâncias e do dimensionamento das suas regiões de cobertura em rodovias. *Produção*, 18 (1), 47-63.
- KARIV, O. e HAKIMI, S.L. (1979) An algorithmic approach to network location problems. Part I: the p -center problem. *SIAM J Appl Math*, 37, 513–538.
- KERSHNER, R. (1939). The Number of Circles Covering a Set. *American Journal of Mathematics*, 61, 665-671.
- LOBO, D.S. (2003). Dimensionamento e Otimização Locacional de Unidades de Educação Infantil. *Tese de Doutorado, UFSC*.
- LORENA, L.A.N. e NARCISO, M.G. (2001). Uso de Algoritmos Genéticos em Problemas de Localização Capacitada. *Comunicado Técnico 010/01*. Acessado em agosto de 2011. Disponível em http://www.cnptia.embrapa.br/comunicado_tecnico.html.
- MARANZANA, F. (1964). On the Location of Supply Points to Minimize Transport Costs. *Operations Research Quarterly*, 13, 261-270.
- MARTINS, I. e PIZZOLATO, N.D. (2004). Utilização da p -mediana para Simulação de Bases Táticas de Helicópteros Policiais. *XII SIMPEP*, Bauru – SP.
- [MLADENOVIC](#), N., [BRIMBERG](#), J., HANSEN, P. e [MORENO-PÉREZ](#), J.A. (2007). The p -median problem: A survey of metaheuristic approaches. [European Journal of Operational Research](#), 179, 927-939.
- MENEZES, R.C. (2010). O uso do SIG – Sistema de Informação Geográfico – para o apoio à decisão no planejamento da localização das Escolas Municipais em Guaratiba, Rio de Janeiro. *Dissertação de Mestrado, PUC/Rio, RJ*.
- NARULA, S.C., OGBU, U.I. e SAMUELSSON, H.M. (1977). An algorithm for the p -median problem. *Operations Research*, 25, 709-713.
- NOVAES, A.G. (1989). Sistemas Logísticos: Transportes, Armazenagem e Distribuição Física de Produtos. *Editora E. Blücher*, São Paulo, 372.
- O’KELLY, M.E. (1987). A Quadratic Integer Program for the Location of Interacting Hub Facilities. *European Journal of Operational Research*, 32, 393-404.
- O’KELLY, M.E. e MURRAY A.T. (2004). A Lattice Covering Model for Evaluating Existing Service Facilities. *Regional Science*, 83, 565-580.
- OKABE, A. e SUZUKI, A. (1997). Locational Optimization Problems Solved through Voronoi Diagrams. *European Journal of Operational Research*, 98, 445-456.
- PIZZOLATO, N.D. (1994). A Heuristic for Large-Size p -median Location Problems with Application to School Location. *Annals of Operations Research*, 50, 473-485.
- PIZZOLATO, N.D., BARROS, A.G., BARCELOS, F.B. e CANEN, A.G. (2004). Localização de Escolas Públicas: Síntese de Algumas Linhas de Experiências. *Pesquisa Operacional*, 24 (1), 111-131.
- PIZZOLATO, N.D. e GANDOLPHO, A. A. (2009). Técnicas de Otimização. *Livros Técnicos e Científicos*, Rio de Janeiro, 225.
- RANDALL, M. (2008). Solution approaches for the capacitated single allocation hub location problem using ant colony optimisation. [Computational Optimization and Applications](#) (2008), 39: 239–261. DOI 10.1007/s10589-007-9069-1.
- RESSE, J. (2006). Solutions Methods for the p -Median Problem: An Annotated Bibliography, [Networks](#), 48(3), 125-142.
- RESENDE, M.G.C. e WERNECK, R.F. (2004). A Hybrid Heuristic for the p -Median Problem. *Journal of Heuristics*, 10, 1, 59-88.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

- REVELLE, C., MARKS, D. e LIEBMAN J.C. (1970). An Analysis of Private and Public Sector Location Models. *Management Science*, 16, 692-707.
- REVELLE, C.S. e EISELT, H.A. (2005). Location Analysis: A Synthesis and Survey. *European Journal of Operational Research*, 165, 1-19.
- ROSA, V. e FERREIRA FILHO, V.J. (2006). Otimização da Localização de Plataformas de Produção, em *Rio Oil&Gas Expo and Conference*, 1, Rio de Janeiro, 1-8.
- ROZENTAL, M. e PIZZOLATO, N.D. (2009). Localização de Shopping Center de Vizinhança Estudo de Caso: Barra da Tijuca, Rio de Janeiro. *Podes, Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento*, 1 (3), 199-207.
- SALKIN, H.M. (1975). Integer Programming. *Addison-Wesley Educational Publishers Inc.*
- SOTOMAYOR ALZAMORA, G., RAUPP, F.M.P. e PIZZOLATO, N.D., (2011). Localização e Alocação de Centros de Saúde: Estudo de Caso em Ácora, Puno, Peru. *SBPO*, Ubatuba - SP.
- TEITZ, M. e BART, P. (1968). Heuristic Methods for Estimated Generalized Vertex Median of a Weighted Graph. *Operations Research*, 16, 955-961.
- TEIXEIRA, J.C. e ANTUNES, A.P. (2008). A Hierarchical Location Model for Public Facility Planning. *European Journal of Operational Research*, 185, 92-104.
- TÖREYEN, Ö. (2007). Hierarchical Maximal Covering Location Problem with Referral in the Presence of Partial Coverage. *M.Sc. Thesis*, Middle East Technical University, Turkish.
- WEBER, A. (1909). Über den Standort der Industrien, Tübingen, Germany, English Translation: Friederich, C.J. (1929). Theory of the Location of Industries. *The University of Chicago Press*, Chicago.
- WOLSEY, L. (1998). A Integer Programming. *John Wiley & Sons Inc*, New York.
- XAVIER, A.E. e XAVIER, V.L. (2011). Solving the Minimum Sum-of-Squares Clustering Problem by Hiperbolic Smoothing and Partition into Boundary and Gravitational Regions. *Pattern Recognition*, 44, 70-77.