PODes
Revista Eletrônica Pesquisa Operacional
para o Desenvolvimento

SOBRAPO

Rio de Janeiro, v.4, n.2, p. 230-248, maio a agosto de 2012

UM MÉTODO HEURÍSTICO CONSTRUTIVO PARA O PROBLEMA DA GRADE HORÁRIA ESCOLAR

Eder Oliveira Abensur
Universidade Federal do ABC - UFABC
eder.abensur@ufabc.edu.br

Rafael Cavalcante de Oliveira
Universidade Federal do ABC - UFABC
rafael.cav007@gmail.com

Resumo

A confecção manual da grade horária de uma instituição de ensino é uma complexa e árdua tarefa, que pode exigir vários dias de trabalho de muitos profissionais. Esta tarefa torna-se tanto mais difícil quanto maiores forem os conflitos de alocação da demanda (alunos, turmas, horários) com os recursos existentes (professores, salas de aula, laboratórios). Este trabalho apresenta o desenvolvimento de uma ferramenta computacional, baseada em técnica heurística, para suporte às tarefas de elaboração da grade horária dos cursos de engenharia de uma universidade. Os testes mostram que o procedimento heurístico proposto proporciona rápidos e bons resultados. O *software* foi desenvolvido em linguagem *Visual Basic* e registrado em conformidade com a lei brasileira de propriedade intelectual (Instituto Nacional de Propriedade Industrial - INPI).

Palavras-chave: Grade Horária Escolar, Heurística Construtiva, Algoritmos Genéticos

Abstract

School timetabling is a complex and hard activity which demands days of work of many professionals. This activity can be much harder depending on the conflicts of demand (students, classes, time) versus resources (professors, class room, laboratories). This work focus on the development of a school timetabling computing tool, based on heuristic concepts, in order to support the decisions of the analyzed university under specific and general restrictions of this institution. The tests show that the proposed heuristic method presents good results and a higher speed performance. The software was developed using Visual Basic and registered in accordance with Brazilian law of Intellectual Property (Instituto Nacional de Propriedade Industrial - INPI).

Keywords: School timetabling, Construtive Heuristic, Genetic Algorithms

Versão inicial submetida em 27/09/2011. Versão final recebida em 14/02/2012.

1. Introdução

O problema da alocação didática em escolas já foi alvo de muitos trabalhos. Devido a sua natureza combinatória, ele é caracterizado como sendo de alta complexidade computacional (*NP-hard)*, o que justifica a abordagem por técnicas heurísticas (Even et al, 1976; Lewis, 2008).

As heurísticas são procedimentos de busca intuitivos desenvolvidos para a obtenção de soluções de problemas que não possuam solução matemática exata. Elas são divididas em dois grupos:

a) heurísticas construtivas: as heurísticas de construção geram uma solução através da adição de componentes individuais, um de cada vez, até achar uma solução factível. Devido a sua simplicidade e rapidez são empregadas para gerar uma solução inicial.

b) heurísticas de melhoria: elas refinam as soluções iniciais das heurísticas construtivas por meio de procedimentos como o de troca de pares (a*ll pairs*). Por esse método, cada parte da solução é trocada por outra. A cada permutação o valor da função objetivo é calculado. O procedimento é encerrado quando não houver mais trocas a fazer.

A alocação de recursos para o atendimento da demanda de serviços expressa por uma programação horária é um problema comum a várias situações, como por exemplo: (i) escala horária de funcionários de linhas de produção de indústrias; (ii) escala horária de enfermeiros e médicos num hospital e (iii) grade horária ou alocação didática de professores em universidades.

O problema da alocação didática ou da programação horária em escolas consiste na confecção de um quadro de horários que represente a rotina semanal dos professores e alunos de uma instituição de ensino, satisfazendo a uma série de requisitos de vários tipos (Castro *et al*, 2008).

Além disso, o problema da programação horária é definido como a alocação de certo número de encontros (aulas) que, por sua vez, atendem um grupo específico de alunos e professores num determinado período (dia e horário), requerendo certos recursos (salas, laboratórios, materiais didáticos) conforme disponibilidade dos próprios recursos. (Tripathy, 1984).

Os requisitos ou restrições podem ser classificados em: (i) de natureza geral, ou seja, comuns a qualquer instituição de ensino ou; (ii) específicos, de acordo com as características da instituição analisada. Entre as mais importantes restrições tem-se:

a) Um mesmo professor não pode dar aulas a turmas diferentes em salas de aulas distintas no mesmo horário;

b) Uma mesma turma não pode ter aulas em salas diferentes no mesmo horário;

c) Não pode haver alocação didática a um professor num dia e horário em que ele esteja indisponível;

d) Sempre que possível, devem ser minimizados os intervalos entre as aulas nos horários dos professores;

e) Há limites de carga horária semanal que pode ser atribuído aos professores;

f) Cada professor deve cumprir uma carga horária semanal mínima;

g) Sempre que possível, deve haver um intervalo de tempo conveniente entre aulas não consecutivas de uma mesma disciplina.

Até a década de 90 do século XX, com o início do desenvolvimento da microinformática, esse problema era tratado com o uso de ferramentas de programação linear e métodos matemáticos que se baseavam em otimização matemática clássica (Tripathy, 1984). Essas ferramentas visavam melhores resultados e menor tempo gasto, comparando-se com o método manual.

A partir da evolução dos microcomputadores, em meados dos anos 90, foi possível a criação de métodos computacionais (algoritmos) com uma capacidade de resolução compatível com problemas de natureza *NP-hard* (problemas que não possuem um algoritmo eficiente de resolução em tempo computacional). Em função disso, o problema da programação horária em

escolas começou a ser abordado por técnicas heurísticas ou metaheurísticas. A tabela 1, embora não exaustiva, mostra um painel desta diversidade de abordagens conforme descrito a seguir:
a) Programação Linear (Tripathy, 1984);
b) *Simulated Annealing* (Abramson, 1991; Aycan e Ayav, 2009; Castro *et al*, 2008;);
c) Algoritmos Genéticos (Colorni *et al*, 1998; Hamawaki, 2005; Pillay e Banzhaf, 2010);
d) Busca Tabu (Bello *et al*, 2008; Nonobe e Ibaraki, 1998; Sousa *et al*, 2008);
e) GRASP (Castro *et al.*, 2008);
f) Heurística Própria (Cooper e Kingston, 1993; Souza *et al*, 2001).

As metaheurísticas são poderosas simulações inspiradas em modelos do cotidiano humano ou da natureza. Como exemplo, os Algoritmos Genéticos (AG) fazem analogia à reprodução humana com diversificação e mutação de cromossomos. Nos AG, o termo cromossomo refere-se tipicamente a uma solução candidata para um problema, normalmente codificada como uma seqüência de *bits.* A solução inicial é gerada aleatoriamente e a busca é feita como uso de operadores de reprodução, *crossover* e mutação (Holland, 1975).

Tabela 1 – Natureza e técnicas empregadas no problema da grade horária

Programação Matemática Heurísticas Metaheurísticas	Abordagem Universidades Brasileiras	Abordagem Universidades Estrangeiras	Abordagem Escolar	Abordagem Genérica[1]
Programação Linear		1		
Simulated Annealing		2	1	
Algoritmos Genéticos	1	1		1
Busca Tabu			2	1
GRASP			1	
Heurística Própria			2	

Fonte: Elaborado pelos autores
[1] Modelo de grade horária para diversas aplicações (ex: industrial)

No Brasil, as universidades públicas e privadas apresentaram propostas computacionais para a resolução do problema, fundamentada no uso de metaheurísticas com o desenvolvimento de modelos matemáticos específicos às suas necessidades (Bello *et al*, 2008; Castro *et al*, 2008; Hamawaki, 2005).

Inicialmente, foi realizado um levantamento das alternativas de grades horárias desenvolvidas para instituições de ensino através de uma revisão bibliográfica com auxílio das bases de dados *Web of Science* e *Scopus.* As alternativas encontradas foram avaliadas no que tange à técnica heurística adotada, das restrições identificadas e do modelo computacional utilizado. Posteriormente, os responsáveis pela confecção manual da grade horária da universidade foram entrevistados. A partir dessas avaliações desenvolveu-se uma heurística construtiva na plataforma do *Microsoft Excel* ® para geração da grade horária dos cursos de engenharia com uso da linguagem *Visual Basic*. A partir da solução inicial gerada por este procedimento, uma solução melhorada é obtida pela aplicação da técnica de troca de pares (*all pairs*). Os testes aplicados geraram 8 grades horárias do curso de engenharia de produção que foram comparados em termos dos melhores resultados encontrados e tempo com as grades obtidas com uso dos algoritmos genéticos (AG) e com o procedimento manual atual. As simulações com os AG foram realizadas com um aplicativo baseado em planilha *Excel* com auxílio da heurística específica baseada no método dos algoritmos genéticos (*Evolve*r ®) da Palisade. Os resultados das simulações de AG foram obtidos com a aplicação da ferramenta *Evolve*r ® sobre o modelo matemático da planilha. O *software* desenvolvido em linguagem *Visual Basic* foi posteriormente registrado no INPI conforme as leis brasileiras de propriedade intelectual.

Este trabalho está dividido da seguinte forma: (i) a seção 2 faz uma revisão histórica dos modelos matemáticos desenvolvidos a respeito do problema da grade horária escolar; (ii) a seção 3 apresenta a formulação matemática da heurística proposta; (iii) na seção 4 os resultados dos testes realizados são mostrados e (iv) a seção 5 apresenta as considerações finais do trabalho.

2. Uma revisão do problema da grade horária escolar

A programação de uma grade horária é abordada pela literatura científica desde os anos 50 do século XX (Tripathy, 1984). A programação da grade de horários em escolas de ensino fundamental e médio consiste em fixar uma seqüência de agendamentos de aulas envolvendo professores e grupos de estudantes (que possuem um mesmo currículo de disciplinas) em um período pré-determinado (tipicamente uma semana). Esta seqüência de agendamentos deve satisfazer um conjunto de requisitos didáticos, físicos e organizacionais (Sousa et al, 2008).

O problema de criar uma grade horária válida envolve a alocação de turmas, professores e salas de tal forma que nenhum professor, turma ou sala sejam alocados mais de uma vez por período (Abramson, 1991). Em outras palavras, nenhum professor, turma ou sala devem aparecer mais de uma vez em qualquer período do tempo (Aycan e Ayav, 2009). Tenta-se encontrar uma grade horária que satisfaça todas as restrições rígidas e minimizar o número de conflitos nas restrições consideradas suaves (Nonobe e Ibaraki, 1998).

O problema da alocação didática pode ser representado por uma matriz $S = s(i,j)\ m \times n$ onde m representa o número de professores e n os horários da semana. Cada célula $s(i,j)$ representa uma turma alocada ao professor i no horário j. A figura 1 a seguir ilustra uma possível representação de um fragmento de uma programação horária semanal. O professor 1 estaria alocado à turma 2 entre 8 e 10hs da manhã da segunda-feira. Uma célula com valor 0 indica horário vago. Uma célula com valor -1 indica que o professor está indisponível neste dia e horário (Castro et al, 2008).

	Horários									
	Segunda-feira				**Terça-feira**				**... ..**	
Prof	08:00	09:00	10:00	11:00	08:00	09:00	10:00	11:00	....	*n*
1	2	2	6	6	0	0	0	0	....	5
2	0	0	-1	-1	4	4	4	4	....	-1
3	7	7	7	7	8	8	-1	-1	....	0
......	......	......	......	......	......	......	......	......	....	......
m	6	6	5	5	-1	-1	0	0		0

Figura 1: Ilustração de uma Alocação Didática
Fonte: Adaptado de Castro *et al*.(2008).

Em geral a função objetivo é uma combinação de atributos e pesos correspondentes considerados para cada instituição. Cada solução do conjunto de soluções do espaço viável é associada a um número real da função objetivo. Um exemplo de função objetivo, atributos e pesos são mostrados abaixo (Castro et al, 2008).

$$F(s) = w_1 \,.\, R_1 + w_2 \,.\, R_2 + w_3 \,.\, R_3$$

Onde:

R_1 = número de vezes que professores diferentes ministram aulas para uma mesma turma num mesmo horário;

R_2 = número de vezes em que aulas de um professor não estão distribuídas em dois ou três horários consecutivos no dia;

R_3 = número de dias em que o professor comparece por semana na instituição;

w_1, w_2 *e* w_3 são os pesos de cada um desses atributos na função *objetivo.*

Se a função objetivo analisada for de minimização, as penalidades atribuídas às restrições rígidas devem ser muito altas, enquanto que para as restrições suaves, as penalidades atribuídas podem ser bem menores, levando-se em consideração as prioridades das restrições (Aycan e Ayav, 2009). Como exemplos de restrições rígidas têm-se: (i) um mesmo professor não pode dar aulas a turmas diferentes em salas de aulas distintas no mesmo horário e (ii) uma mesma turma não pode ter aulas em salas diferentes no mesmo horário. Como exemplo de restrição suave tem-se a minimização dos intervalos entre as aulas nos horários dos professores.

Outro ponto de vista sobre o problema é o apresentado por Tripathy (1984) onde se fez necessária uma redução do número de atributos envolvidos para simplificação operacional da análise combinatória. Partindo dessa idéia, pode-se então redefinir as variáveis necessárias através de uma operação de "agrupamento". Essa operação consiste em juntar num mesmo grupo elementos que contenham características em comum.

Em geral, um grupo de alunos é o conjunto caracterizado pelos alunos que estão envolvidos num mesmo fluxo. Quando um grupo de alunos é definido dessa maneira, todas as matérias que devem atender a esse grupo específico têm que ser alocadas em diferentes períodos conforme mostrado na figura 2 a seguir.

Grupo de Alunos / **Matérias**	**A**	**B**	**C**
1	●		●
2		●	
3	●		
4		●	●
5	●	●	●
6	●	●	
7		●	
8	●		●

Figura 2**:** A relação entre os grupos de alunos e as matérias
Fonte: adaptado de Tripathy (1984).
● indica a matéria a ser atendida pelo grupo de estudantes.

Uma vez que foram formados os grupos de alunos, o próximo passo é agrupar as matérias em grupos de matérias. Um grupo de matérias é definido como o conjunto das matérias que são atendidas pelo mesmo grupo de alunos. A vantagem de agrupar as matérias é a redução do número de variáveis e a conseqüente simplificação do problema conforme apresentado na figura 3 a seguir.

Grupo de Alunos / **Grupo de Matérias**	**A**	**B**	**C**
1		●	
2	●		
3	●		●
4		●	●
5	●	●	
6	●	●	●

Figura 3: A relação entre o grupo de alunos e o grupo de matérias
Fonte: adaptado de Tripathy (1984).
● representa que o grupo de matérias é atendido pelo grupo de estudantes

Finalmente, as salas são agrupadas quanto às suas finalidades e suas capacidades. Um grupo de salas está associado com cada grupo de matérias. Isto especifica o tamanho da sala e sua finalidade para determinado grupo de matérias (Tripathy, 1984). A função objetivo para esse entendimento do problema é caracterizada pela maximização da relação a seguir (conforme originalmente publicado pela *Management Science*):

Supondo que:
NSG = número total de grupos de matérias;
NTG = número total de grupos de alunos;
NRG = número total de grupos de salas;
NP = número total de períodos na semana;
NSPG = número total de períodos por semana

$x_{ij} = 1$ se o grupo de matérias i (= 1, 2,..., NSG) é alocado no período j (= 1, 2,..., NP)

$x_{ij} = 0$ caso contrário

$$\sum_{i=1}^{NSG} \sum_{j=1}^{NP} c_{ij} x_{ij} \qquad \text{(maximizar)}$$

$$\sum_{j=1}^{NP} x_{ij} = NSPG_i \qquad i = 1, 2, \ldots, NSG \qquad \text{(P-I:limite de períodos demandados pelos grupos)}$$

$$\sum_{i \in R_k} x_{ij} \le a_{kj} \qquad j = 1, 2, \ldots, NP, \quad k = 1, 2, \ldots, NRG \text{ (P-II: disponibilidade de salas)}$$

$$\sum_{i \in T_l} x_{ij} \le 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, NP, \quad I = 1, 2, \ldots, NTG \quad \text{(P-III: conflito turma x disciplina)}$$

C_{ij} é a função objetivo relacionada à conveniência de X_{ij}.
Restrições:

(P-I) – é o conjunto das restrições relacionado com o número de períodos necessários por semana pelo grupo de matérias;

(P-II) – é o conjunto das restrições relacionado com a disponibilidade de salas;

(P-III) – é o conjunto das restrições que trata do fato de que um grupo de alunos não pode ser atendido por mais de um grupo de matérias num determinado período. É a mesma representação da tabela 'matriz de conflitos', ou seja, o conflito dos grupos de matérias não pode ser alocado simultaneamente (Tripathy, 1984).

Finalmente, Cooper e Kingston (1993) apresentam uma representação do problema por meio do confronto entre os recursos de grupos (professores, horários, alunos e salas) a uma demanda de encontros. O propósito é evitar a alocação de determinado recurso de diferentes grupos a mais de um encontro simultaneamente.

Os grupos contêm os elementos, que são os envolvidos diretamente na alocação, e subgrupos, que indicam as funções que os elementos realizam. Por exemplo:

Grupo: Professores
Subgrupos: Inglês, Ciências, Computação;
Elementos: **João** leciona Inglês, Computação;
Maria leciona Ciências, Computação;
José leciona Inglês.
Fim Grupo Professores

Esse exemplo ilustra de forma bem simples o que normalmente acontece no problema abordado, visto que diferentes elementos (João, Maria, José) de um grupo (professores) podem ou não pertencer ao mesmo subgrupo (Inglês, Ciências, Computação), e que a ocorrência da sobreposição dessas funções é extremamente comum.

Encontro: *Slot* (faixa horária) 3x5 - Inglês
De: Alunos **tipo** A;
De: Professores **tipo** Inglês **selecionado** C;
De: Salas **tipo** 50 alunos **selecionado** 2;
De: Horários **selecionado** 6;
Fim Encontro *Slot* 3x5-Inglês

Esse exemplo ilustra como seria um encontro (neste caso, o encontro é o presente no *Slot* 3x5 de matéria Inglês) dos vários grupos (Alunos, Professores, Salas e Horários) e seus respectivos elementos selecionados (do grupo Alunos, o elemento classificado como A; do grupo Professores, o elemento habilitado a lecionar Inglês classificado como C, e assim por diante).

Os encontros, por sua vez, são coleções de *slots*, aos quais podem ser atribuídos os vários grupos já definidos. Os *slots* (faixas horárias), entretanto, definem-se como sendo as células da matriz $S = a \times b$, onde a representa os horários disponíveis e b os dias da semana conforme apresentado na tabela 2 a seguir (Cooper e Kingston, 1993).

Tabela 2 - *Slots* distribuídos na grade horária

Horários	**Segunda-feira**	**Terça-feira**	**...**	**n**
8:00 às 9:00	*Slot* 1x1	*Slot* 2x1	...	*Slot* m x 1
9:00 às 10:00	*Slot* 1x2	...	...	*Slot* m x 2
10:00 às 11:00	...	...	...	...
...	...	...	...	...
M	*Slot* 1 x n	*Slot* 2 x n	...	*Slot* m x n

Fonte: elaborado pelos autores

2.1 – Representações Matemáticas do Problema

As representações matemáticas desenvolvidas em todos os trabalhos estudados encontram-se abaixo divididas sob duas óticas diferentes. A ótica da programação linear inteira (PLI) aborda o problema por meio de variáveis de decisão multidimensionais binárias (ex: X_{ijklm}...) com o intuito de captar todas as possibilidades de alocação (ex: professor i da disciplina j da turma k disponível para o *slot* m...). Apesar de oferecer um raciocínio lógico sofisticado e rastreável, a abordagem de PLI aumenta, significativamente, o número de variáveis envolvidas, as restrições e o tempo computacional de resolução. A abordagem heurística, por sua vez, assume as faixas reais dos valores de cada variável de decisão e busca melhorar a solução inicial viável obtida após sucessivas iterações em um tempo computacional aceitável. Em comum, ambas as abordagens usam pesos, arbitrariamente, alocados a cada um dos componentes da função objetivo.

2.1.1 - A Perspectiva da Programação Linear Inteira

Variáveis de Decisão

h = identificação do professor (cada professor possui um número que o identifica no modelo, representado por essa letra h);
i = disciplinas;
j = turma (relacionada ao período da disciplina, manhã, tarde ou noite);
k = dia (dias letivos da semana);
l = hora;
x = variável de alocação, tal que $x \in \{0,1\}$, ou seja, uma variável binária.

Restrições

1 – A quantidade alocada de professores às disciplinas no período tem que ser menor ou igual à quantidade total de professores disponíveis:

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{h=1}^{H_i} x_{hji} \leq X$$

I = número de disciplinas a serem alocadas no período;
J_i = número de turmas da disciplina i do período;
H_i = número de professores habilitados a lecionar a disciplina i;
X = número de professores disponíveis.

2 – Neste trabalho, o termo "crédito" faz referência a uma hora da grade horária semanal. O número de créditos representa tanto a carga horária das disciplinas como a quantidade de horas dedicadas pelos professores à ministrar suas disciplinas. O número de créditos alocados ao professor h tem que ser menor ou igual ao número máximo de créditos permitidos a esse professor no período:

$$\sum_{h=1}^{H} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{Ji} x_{jih} . c_i \leq C_h$$

H = número de professores;
I = número de disciplinas do período;
J_i = número de turmas da disciplina i do período;
c_i = número de créditos da disciplina por semana;
C_h = número máximo de créditos permitidos ao professor h no período.

3 – Um mesmo professor não pode dar mais de uma aula no mesmo dia e horário:

$$\sum_{h=1}^{H} \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L_k} x_{lkh} \leq 1$$

H = número de professores;
K = número de dias letivos da semana;
L_k = faixa de horários associada ao dia k.

4 – Mais de uma disciplina não pode ser alocada no mesmo dia e horário:

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L_k}\sum_{a=1}^{A}\sum_{i=a+1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(x_{jalk} + x_{jilk}) \leq 1$$

$A = I - 1$
K = número de dias letivos na semana;
L_k = faixa de horários relativa ao dia k;
A = número total de disciplinas alocadas do período menos uma;
I = número total de disciplinas alocadas no período;
J = número de turmas do período.

5 – Uma mesma disciplina tem que cumprir seu número de créditos semanais:

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L_k} x_{lkij} = C_i$$

I = número total de disciplinas alocadas no período;
J_i = número de turmas da disciplina i do período;
K = número de dias letivos na semana;
L_k = faixa de horários relativa ao dia k;
C_i = créditos da disciplina i.

Função Objetivo

A função objetivo consiste em maximizar a alocação didática, sendo x a variável de alocação do tipo binária, tendo como valores 0 (não alocado) ou 1 (alocado). Assim:

$$max\sum_{z=1}^{Z} f_z(Q)$$

Z = número de parcelas da função objetivo;
Q = grade horária a ser determinada.
$f_1(Q)$ = alocação de um dado professor h a uma disciplina i de uma dada turma j:

$$f_1(Q) = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}\sum_{h=1}^{H_i} \alpha_{hji}.x_{hji}$$

I = número de disciplinas a serem alocadas no período;
J_i = número de turmas associadas à disciplina i do período;
H_i = número de professores habilitados a lecionar a disciplina i do período;

α_{hji} = peso relacionado a cada uma das alocações.
$f_2(Q)$ = alocação de uma disciplina i em um dado dia k e horário l_k :

$$f_2(Q) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L_k} \beta_{lkji} . x_{lkji}$$

I = número de disciplinas a serem alocadas no período;
J_i = número de turmas associadas à disciplina i do período;
K = número de dias letivos na semana;
L_k = faixa de horários associada ao dia k ;
β_{lkji} = peso relacionado a cada uma das alocações.

2.1.2 A Perspectiva Heurística

Variáveis de Decisão

x_{ij} = variável de alocação da disciplina i no *slot* j **;**
y_{hj} = variável de alocação do professor h com a disciplina i ;
z_{hj} = variável de alocação do professor h no *slot* j .

Restrições

1 **–** Carga horária do professor:

$$\sum_{h=1}^{H} \sum_{i=1}^{I_h} y_{ih} . c_i \leq C_h$$

H = número de professores alocados no período;
I_h = número de disciplinas relacionadas ao professor h ;
c_i = número de créditos associados à disciplina i ;
C_h = número de créditos relativos ao professor h no período.

2 – Carga horária da disciplina:

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} c_{ji} = C_i$$

I = número de disciplinas do período;
J = número de *slots* do período;
c_{ji} = número de créditos da disciplina na semana;
C_i = número de créditos da disciplina i do período.

Função Objetivo

$$FO = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\kappa_{ji}.x_{ji} + \sum_{i=1}^{I}\sum_{h=1}^{H}\psi_{hi}.y_{hi} + \sum_{h=1}^{H}\sum_{j=1}^{J}\varepsilon_{jh}.z_{jh}$$

κ_{ji} = peso relacionado à disciplina i alocada no *slot* j;

ψ_{hi} = peso relacionado ao professor h alocado à disciplina i;

ε_{jh} = peso relacionado ao professor h no *slot* j.

2.2.2. Conclusões Iniciais sobre o Problema e a Universidade Analisada

Conforme a revisão bibliográfica feita sobre o assunto e o levantamento do processo de alocação didática praticado pela universidade estudada, conclui-se que:

a) Todos os artigos avaliados fizeram algum tipo de simplificação ou redução das variáveis analisadas para ganho de desempenho computacional. Muitos trabalhos optaram por sacrificar a qualidade da solução final em troca de melhor tempo de processamento (ex: flexibilização da função objetivo);
b) Os ambientes estudados apresentavam equilíbrio entre os recursos oferecidos (professores, salas) e a demanda (alunos, disciplinas);
c) As principais restrições abordadas foram: (i) alocar duas disciplinas diferentes para a mesma turma no mesmo dia e horário, (ii) alocar a mesma sala para duas turmas diferentes no mesmo dia e horário e (iii) respeitar o limites de salas e *slots* oferecidos para o período;
d) O ambiente da universidade estudada apresenta dificuldades adicionais não encontradas nos trabalhos analisados tais como: (i) escassez de professores em alguns cursos; (ii) incompatibilidade entre as cargas horárias de algumas disciplinas e os *slots* oferecidos (disciplinas com cargas horárias impares e quantidade par de *slots* horários por período do dia) e (iii) coexistência de gerações de alunos que entraram em períodos diferentes num mesmo ano;
e) Há uma baixa intersecção de disciplinas profissionalizantes entre as engenharias. Encontrou-se apenas 9 disciplinas conflitantes em mais de 300 disciplinas oferecidas. Esta baixa intersecção dá oportunidade para aplicação de procedimentos de decomposição do problema da grade horária;
f) A atual capacidade da universidade em termos de salas de aula e laboratórios é suficiente para os períodos de cursos profissionalizantes de engenharia. Os períodos matutino, diurno e noturno oferecem 4 *slots* ou faixas horárias. Portanto, o processo de alocação torna-se facilitado desde que as cargas horárias das disciplinas sejam pares. As disciplinas com número ímpar de créditos de aula seriam convertidas ao número par imediatamente superior para simplificação do processo de alocação.

3. Modelo matemático e a heurística proposta

A concepção do modelo matemático e da heurística proposta foi obtida por meio da revisão bibliográfica apresentada, da análise da situação atual da universidade estudo de caso e por informações extraídas de entrevistas com os executores da elaboração manual da grade horária. Os dados referentes às informações que irão alimentar o modelo são introduzidos em forma de matrizes. As matrizes principais identificadas para alimentar o modelo são:

i. Disciplinas x Período;
ii. Professores x Disciplinas;
iii. Professores x Dias (Preferência).

O modelo proposto segue as linhas gerais (função objetivo, restrições) apresentadas dos modelos heurísticos de grade horária maximizando a pontuação das preferências de *slots* e disciplinas dos professores deduzindo-se das penalidades pelo não cumprimento às seguintes restrições: (i) um mesmo professor não pode dar aulas a turmas diferentes no mesmo horário; (ii) uma mesma turma não pode ter aulas em salas diferentes no mesmo horário; (iii) cumprimento da carga horária semanal de cada disciplina; (iv) cumprimento da carga horária semanal de cada professor e (v) intervalos entre aulas diárias consecutivas de um mesmo professor limitado a 4 horas, deduzindo-se as paradas para refeições.

Além disso, as seguintes premissas devem ser satisfeitas:

a) A lista de disciplinas oferecidas segue a ordem cronológica dos projetos pedagógicos dos cursos analisados;
b) As disciplinas possuem entre 2 e 6 créditos (horas-aula) semanais;
c) Dois dias de intervalo entre aulas consecutivas da mesma disciplina;
d) Exceto em situações especiais, os professores estão disponíveis para todos os *slots* da semana;
e) Há pelo menos 2 professores de opção preferencial para cada disciplina;
f) Os pesos de indisponibilidade, disponibilidade moderada e completa para as preferências de *slots* e disciplinas são, respectivamente, de: 0, 1 e 2;
g) Os pesos para as restrições de cumprimento do número de créditos da disciplina, do intervalo entre aulas consecutivas da mesma disciplina e do intervalo entre as aulas nos horários dos professores são, respectivamente, de: 10, 1 e 1;
h) Os *slots* (faixas horárias) são de duas horas;
i) Há um total de 32 *slots* na semana incluindo 2 *slots* no sábado conforme mostrado na tabela 3 a seguir;
j) Conforme descrito no item f da seção 2.2.2, a capacidade das salas de aula foi considerada infinita para os propósitos das simulações.

O modelo matemático proposto é apresentado a seguir.

$$\max\ Z = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\psi_i . x_j + \sum_{j=1}^{J}\sum_{z=1}^{Z}\varepsilon_z . x_j + w\left[\left(\sum_{i=1}^{Y} y_i c_i\right) - C\right] + \gamma\left[\sum_{\substack{j=1 \\ p/\forall xj\neq 0}}^{J}\sum_{z=1}^{2}\left| x_{jz} - \sum_{j=1}^{J}\sum_{z=4}^{6} x_{jz}\right|\right]$$

$$+\alpha\left[\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ p/\forall yiz\neq 0\ e\ z\in\{2,4,6\}}}^{I}\ \sum_{z=1}^{6}\left| y_{iz} - y_{iz+11}\right| + \sum_{\substack{i=1 \\ p/\forall yiz\neq 0\ e\ z\in\{1,3,5\}}}^{I}\ \sum_{z=1}^{6}\left| y_{iz} - y_{iz+13}\right| \\ \displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ p/\forall yiz\neq 0\ e\ z\in\{8,10,12\}}}^{I}\ \sum_{z=7}^{12}\left| y_{iz} - y_{iz+11}\right| + \sum_{\substack{i=1 \\ p/\forall yiz\neq 0\ e\ z\in\{7,9,11\}}}^{I}\ \sum_{z=7}^{12}\left| y_{iz} - y_{iz+13}\right| \end{array}\right]$$

sujeito a :

$0 \leq x_j \leq J \quad J \in \{0, 1, 2, ...13\}$

$0 \leq y_i \leq I \quad I \in \{0, 1, 2, ...6\}$

Onde:

ψ =peso relacionado ao professor *j* alocado à disciplina i;

ε = peso relacionado ao professor *j* no *slot z*;

γ = peso relacionado ao intervalo entre aulas diárias consecutivas de um mesmo professor;

w = peso relacionado ao cumprimento dos créditos da disciplina *i;*

α = peso relacionado à continuidade de professores e disciplinas para a mesma turma;

x_i = professor relacionado para a disciplina *i* no período analisado;

y_i = disciplina relacionada para o período analisado;

I = número de disciplinas do período;

J = número de professores do período;

c_i = número de créditos da disciplina *i* no período;

C = número total de créditos das disciplinas oferecidas no período;

z = *slot* (faixa horária)

Tabela 3 – Ordenação dos *Slots* distribuídos na grade horária elaborada

Horários	Segunda-feira	Terça-feira	...	Sábado
08:00 às 10:00	*Slot* 1	*Slot* 7	...	*Slot* 31
10:00 às 12:00	*Slot* 2	*Slot* 8	...	*Slot* 32
14:00 às 16:00	*Slot 3*	*Slot* 9	...	
16:00 às 18:00	*Slot* 4	*Slot* 10	...	
19:00 às 21:00	*Slot* 5	*Slot 11*		
21:00 às 23:00	*Slot* 6	*Slot* 12	...	

Fonte: elaborado pelos autores

A heurística construtiva de geração da solução inicial parte da enumeração e ordenação dos professores em ordem crescente de preferência por disciplina e da ordenação das disciplinas em ordem decrescente de carga horária semanal. A partir da escolha da disciplina de maior carga horária, os professores são classificados em de 1ª opção (preferencial) e 2ª opção (não preferencial) com seleção dos seus *slots* de preferência priorizando-se sempre que possível a utilização dos professores de 1ª opção, ou, caso necessário, os de 2ª opção. Posteriormente, os *slots* são preenchidos com o par (professor, disciplina), respeitando-se as restrições citadas no modelo matemático, até que todas as disciplinas oferecidas sejam analisadas. Após a geração da solução inicial, uma heurística de melhoria baseada no procedimento *all pairs* é acionada para refinamento da solução encontrada. A figura 4 a seguir apresenta o fluxo lógico resumido da heurística desenvolvida.

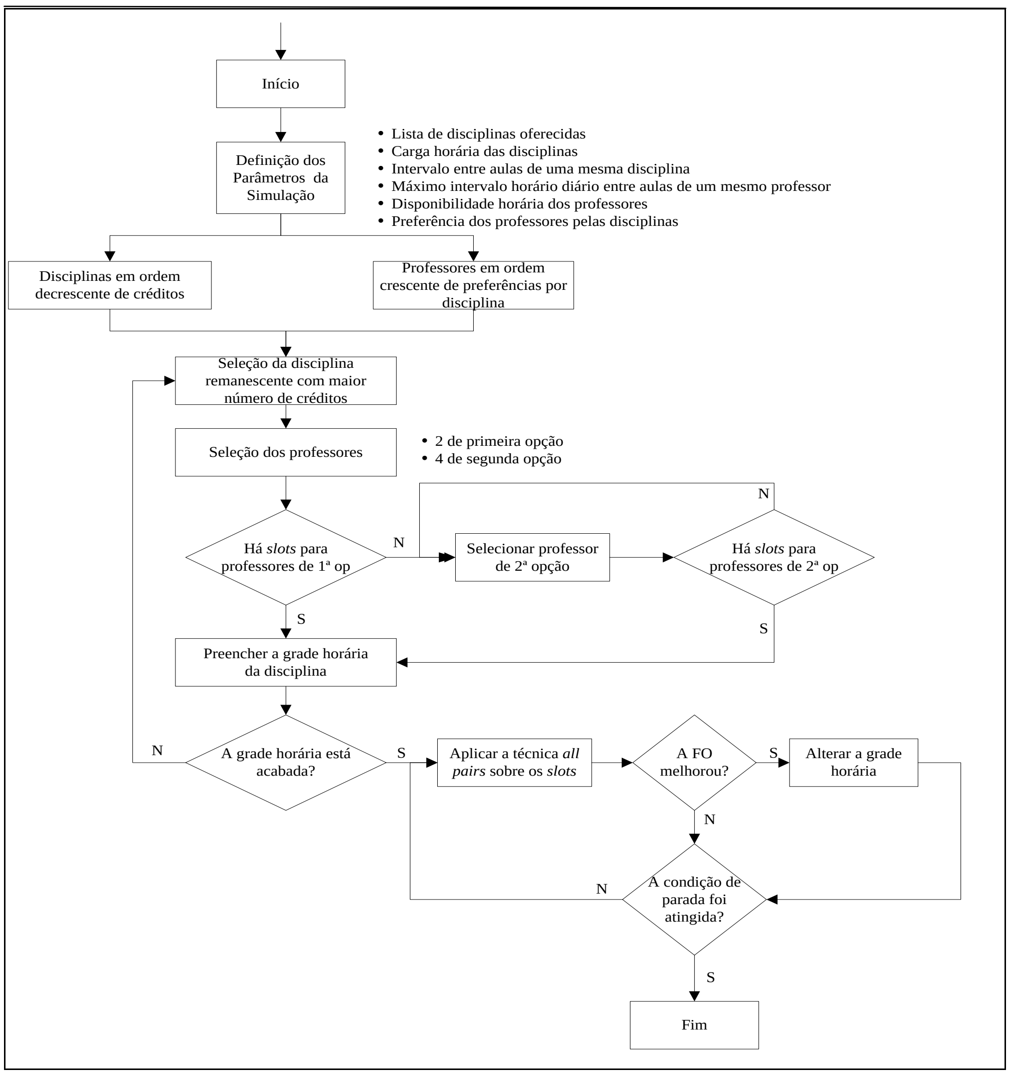

Figura 4 – Fluxo lógico da heurística de geração da grade horária

4. Resultados

A universidade estudo de caso possui aproximadamente 6.000 alunos e está em estágio inicial de atividades não apresentando ainda turmas formadas. Os alunos após cumprirem um ciclo básico de nove trimestres (equivalentes a três anos) fazem as opções dos cursos específicos. As coordenações do ciclo básico e dos cursos específicos são separadas e distintas. Os testes foram aplicados sobre as disciplinas obrigatórias e um conjunto de disciplinas não obrigatórias, oferecidas pelo curso de Engenharia de Produção, que, conforme a ordem cronológica proposta por seu projeto pedagógico, juntamente com as disciplinas básicas (não simuladas), totalizam os créditos suficientes para a sua conclusão. Na época da pesquisa, o curso contava com doze professores e cento e vinte alunos regularmente inscritos. Foram simuladas oito grades horárias com quarenta e quatro disciplinas para dezesseis turmas (diurno, noturno) compreendendo um ciclo anual (três trimestres consecutivos). Os testes foram aplicados às turmas atuais, pois não há turmas anteriores à época da pesquisa para comparações. Usou-se um microcomputador com processador I3 e 4GB de memória RAM.

Como a universidade estudada está em começo de atividades, ainda há falta de docentes para cumprir adequadamente as exigências de seus projetos pedagógicos. Por essa razão, foi incluído um professor fictício que possui competências para todas as disciplinas e disponibilidade horária para todos os *slots* da grade. Esta medida permitiu viabilizar as simulações e ofereceu uma nova utilidade para a ferramenta, pois os créditos acumulados neste professor indicam a quantidade de docentes em falta na instituição.

São apresentadas três grades horárias nas figuras 5 a 7. A tabela 4 resume os testes feitos e compara-os a uma heurística específica baseada no método de Algoritmos Genéticos (*Evolve*r ®) desenvolvida pela Palisade. Os resultados também são comparados ao método manual atualmente praticado. Não há históricos do método manual atual e os tempos para elaboração de uma grade horária por esse método foram estimados com os próprios executores. Eram comuns problemas de conflitos de horários pelo método manual (mesmo professor para duas disciplinas diferentes no mesmo dia e horário). Por questões de confidencialidade os nomes dos professores foram substituídos por números.

O objetivo do trabalho era o desenvolvimento de uma ferramenta operacional de apoio às atividades de elaboração de grade horária. Neste sentido, a heurística construtiva proposta apresentou um bom desempenho. Em relação ao método manual atualmente praticado houve eliminação dos conflitos de alocação com um ganho médio de 37.636% em tempo. Mesmo quando comparado aos algoritmos genéticos os resultado são promissores, pois há uma diferença média de: (i) 2.724% favorável em relação ao tempo e (ii) 5,19% desfavorável em relação a função objetivo. A presença do professor fictício proporcionou uma visibilidade das necessidades de docentes para o curso analisado, principalmente para a sobreposição das grades 2, 5 e 8 que apresentam uma maior oferta de disciplinas específicas.

Para os propósitos desta pesquisa, de acordo com as explicações apresentadas e após sucessivas tentativas, visualizou-se uma convergência dos resultados com a seguinte configuração de parâmetros do algoritmo genético: (i) M = 64 (tamanho do cromossomo); (ii) taxa uniforme de *crossover* (troca) igual a 50%; (iii) taxa de mutação de 10%; (iv) critério de parada após 75.000 iterações e (v) método *recipe* (método de resolução onde os valores das variáveis são mudados de forma independente) interno ao Evolver®.

	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
8:00-10:00	Gestão Operacional	Análise de Balanço	Int. Proc. Fab.	-	-	Análise de Balanço
	Prof 10	Prof 5	Prof 4	-	-	Prof 9
10:00-12:00	Int. Proc. Fab.	Gestão Pessoas	Gestão Operacional	Análise de Balanço	-	-
	Prof 4	Prof 7	Prof 10	Prof 5	-	-
14:00-16:00	Tempos, Métodos	-	Inovação Tecnológica	-	-	
	Prof 9	-	Prof 6	-	-	
16:00-18:00	Inovação Tecnológica	-	Tempos, Métodos	-	-	
	Prof 6	-	Prof 9	-	-	
19:00-21:00	Gestão Operacional	Tempos, Métodos	Int. Proc. Fab.	Inovação Tecnológica	Análise de Balanço	
	Prof 3	Prof 7	Prof 3	Prof 4	Prof 9	
21:00-23:00	Int. Proc. Fab.	Inovação Tecnológica	Gestão Operacional	Tempos, Métodos	Gestão Pessoas	
	Prof 3	Prof 4	Prof 3	Prof 7	Prof 1	

Figura 5 – Grade horária 4

	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
8:00-10:00	Eng. Logística	Gerência Ativos	Eng Laboral	Pesquisa Op. Aplicada	-	Gerência Ativos
	Prof 10	Prof 11	Prof 8	Prof 5	-	Prof 12
10:00-12:00	Eng Laboral	Pesquisa Op. Aplicada	Eng. Logística	Gerência Ativos	-	Pesquisa Op. Aplicada
	Prof 8	Prof 5	Prof 10	Prof 11	-	Prof. Fictício
14:00-16:00	Eng. Econ. Aplic. Gest.	-	Gest. Rec. Energ.	-	-	
	Prof 9	-	Prof 6	-	-	
16:00-18:00	Gest. Rec. Energ.	-	Eng. Econ. Aplic. Gest.	-	-	
	Prof 6	-	Prof 9	-	-	
19:00-21:00	Eng. Logística	Eng. Econ. Aplic. Gest.	Eng Laboral	Gest. Rec. Energ.	Gerência Ativos	
	Prof 1	Prof 7	Prof 3	Prof 3	Prof 12	
21:00-23:00	Eng Laboral	Gest. Rec. Energ.	Eng. Logística	Eng. Econ. Aplic. Gest.	Pesquisa Op. Aplicada	
	Prof 3	Prof 3	Prof 1	Prof 7	Prof. Fictício	

Figura 6 – Grade horária 5

	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
8:00-10:00	Eng. Humana	Sist. Int. Gest. QASS	Desen. Int. Prod.	-	-	-
	Prof 6	Prof 12	Prof 8	-	-	-
10:00-12:00	Desen. Int. Prod.	Microeconomia	Eng. Humana	-	-	-
	Prof 8	Prof 11	Prof 6	-	-	-
14:00-16:00	El.An.Av. Proj.	-	Processos Cont. Prod.	-	-	
	Prof 2	-	Prof 9	-	-	
16:00-18:00	Processos Cont. Prod.	-	El.An.Av. Proj.	-	-	
	Prof 9	-	Prof 2	-	-	
19:00-21:00	Eng. Humana	El.An.Av. Proj.	Desen. Int. Prod.	Processos Cont. Prod.	Sist. Int. Gest. QASS	
	Prof 5	Prof 1	Prof 3	Prof 8	Prof 4	
21:00-23:00	Desen. Int. Prod.	Processos Cont. Prod.	Eng. Humana	El.An.Av. Proj.	Microeconomia	
	Prof 3	Prof 8	Prof 5	Prof 1	Prof 7	

Figura 7 – Grade horária 6

Tabela 4 – Resumo Comparativo dos Melhores Resultados e Tempos Encontrados

	Método Manual	Heurística Construtiva		Heurística Construtiva + Heurística de Melhoria		Heurística Construtiva + Algoritmo Genético	
Grade	Tempo(s) [1]	F.Objetivo	Tempo (s)	F.Objetivo	Tempo (s)	F.Objetivo	Tempo (s)
1	1200	27	3,47	27	8,10	32	89,47
2	1200	38	2,31	38	6,94	38	89,55
3	1200	71	2,31	71	6,94	75	84,31
4	1200	76	2,31	76	6,94	84	84,31
5	1200	88	4,63	88	6,94	92	96,43
6	1200	80	4,63	80	8,10	80	92,63
7	1200	73	3,47	73	8,10	78	91,47
8	1200	86	2,31	86	8,10	88	90,31
Média	1200	67,38	3,18	67,38	7,52	70,88	89,81

[1]Tempo estimado

5. Considerações finais

Com base na revisão da bibliografia especializada do problema da grade horária escolar e por meio de levantamento de campo realizado com os executores da atual alocação didática manual da universidade analisada, desenvolveu-se uma heurística que mantém a qualidade nos objetivos de propostas tradicionais como a programação linear inteira e as metaheurísticas, mas com relevante ganho de tempo computacional. O tempo é uma característica significativa para uma universidade que elabora mais de 2100 grades horárias por ano.

Conforme levantamento feito nas bases *Web of Science* e *Scopus* e devido às características particulares da instituição estudo de caso, a heurística criada pode ser considerada inédita em termos de formulação matemática e voltada para as necessidades de todos os cursos de engenharia da universidade. Ela ainda proporciona a possibilidade de planejar o dimensionamento dos recursos humanos por meio da inclusão de uma variável fictícia (professor fictício). Uma interessante linha de pesquisa seria a incorporação de um procedimento metaheurístico (ex: *Simulated Annealing*, Busca Tabu, GRASP) que equilibrasse os desempenhos de tempo e função objetivo. Outra sugestão para novos estudos é a comparação da formulação proposta com outras apresentadas na literatura.

Essa heurística foi desenvolvida em plataforma de um *software* popular como o Microsoft Excel, permitindo uma grande flexibilidade e alta capacidade de disseminação e implantação em outros centros de ensino como a rede de ensino fundamental e médio.

REFERÊNCIAS

Abramson, D. (1991). Constructing School Timetables Using Simulated Annealing. Management Science, 37, 98-113**.**

Aycan, E. & Ayav, T. (2009). Solving the Course Scheduling Problem Using Simulated Annealing. In: IEEE International Advance Computing Conference, 462-466.

Bello, G.S. & Rangel, M. C & Boeres, M.C.S. (2008). Uma Abordagem do Problema da Programação da Grade Horária Sujeito a Restrições Utilizando Coloração de Grafos. In: XL Encontro da Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional, 1895-1905.

Castro, R.R.M. & Martins, A. X & Souza M.J.F. (2008). Planejamento de Aulas de um Departamento via *Simulated Annealing*. In: XL Encontro da Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional, 1402-1412.

Colorni, A.& Dorigo, M. & Maniezzo, V. (1998). Metaheuristics for High School Timetabling. Computational Optimization and Applications, 9, 275-298**.**

Cooper, T.M. & Kingston, J.H. (1993). The Solution of Real Instances of the Timetabling Problems. The Computer Journal, 36, 645-653.

Even, S. & Itai, A. & Shamir, A. (1976). On the Complexity of Timetabling and Multicommodity Flow Problems. Journal of Computation, 5, 691-703**.**

Hamawaki, C.D.L. (2005). Geração Automática de Grade Horária Usando Algoritmos Genéticos: O Caso da Faculdade de Engenharia Elétrica da UFU. Uberlândia. 104 p. Originalmente apresentada como dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia.

Holland, J.H. (1975). Adaptation in Natural and Artificial Systems. Ann Arbor: The University of Michigan Press.

Lewis, R. (2008). A survey of metaheuristic-based techniques for University Timetabling problems. OR Spectrum, 30, 167-190.

Nonobe, K. & Ibaraki, T. (1998). A tabu search approach to the constraint satisfaction problem as a general problem solver. European Journal of Operational Research, 106, 599-623.

Pillay, N. & Banzhaf, W. (2010). An Informed Genetic Algorithm for the Examination Timetabling Problem. Applied Soft Computing, 10, 457-467.

Sousa, V.N. & Moretti, A.C. & Podestá, V.A. (2008). Programação da Grade Horária em Escolas de Ensino Fundamental e Médio. Pesquisa Operacional, 28, 399-421.

Souza, M.J.F. & Maculan, N. & Ochi, L.S. (2001). Uma Heurística para o Problema de Programação de Horários em Escolas. Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, 2, 213-222.

Tripathy, A. (1984). School Timetabling – A Case In Large Binary Integer Linear Programming. Management Science, 30, 1473-1489**.**