

## MÉTODOS DE PONTOS INTERIORES APLICADOS AO PROBLEMA DE PRÉ-DESPACHO DE UM SISTEMA HIDROTÉRMICO

**Roy Wilhelm Probst**

Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Departamento Acadêmico de Matemática  
[rwprobst@utfpr.edu.br](mailto:rwprobst@utfpr.edu.br)

**Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira**

Universidade Estadual de Campinas  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
[aurelio@ime.unicamp.br](mailto:aurelio@ime.unicamp.br)

### Resumo

Os métodos de pontos interiores de trajetória central e preditor-corretor são desenvolvidos para o problema de minimização das perdas na geração e transmissão do pré-despacho DC de um sistema de potência hidrotérmico e a estrutura matricial resultante explorada obtendo uma implementação eficiente. No pré-despacho de sistemas hidrotérmicos, as usinas hidroelétricas têm uma meta a cumprir em um determinado dia, estabelecida pelo planejamento de longo prazo. As usinas termoeletricas, por sua vez, apresentam restrições de rampa, pois necessitam de um determinado tempo tanto para aumentar quanto para reduzir sua produção de energia. A implementação dos métodos de pontos interiores é testada em estudos de casos com sistemas IEEE.

**Palavras-Chaves:** Sistemas de Potência, Sistemas Hidrotérmicos, Métodos de Pontos Interiores, Programação Quadrática.

### Abstract

The central path and the predictor-corrector interior point methods are developed for the generation and transmission loss optimization problem for a DC power flow model in a hydrothermal power system and the resulting matrix structure is exploited leading to an efficient implementation. In short term hydrothermal scheduling, the hydro generating units need to satisfy daily targets, established by long-term scheduling models. The thermal generating units have ramp constraints because they need a certain amount of time to change de level of power delivery. Case studies with the developed interior point implementation for IEEE power systems are presented.

**Keywords:** Power Systems, Hydrothermal Systems, Interior Points Methods, Quadratic Programming.

## 1. Introdução

Nesta seção será feita uma breve introdução sobre o problema de fluxo de potência ótimo, sua generalização para o problema de pré-despacho e os métodos de pontos interiores.

### 1.1. Fluxo de Potência Ótimo

Fluxo de potência ótimo é um termo genérico dado a uma classe de problemas que busca otimizar uma função objetivo específica satisfazendo restrições provenientes de particularidades físicas e operacionais da rede elétrica (Momoh et al., 1999; Quintana et al., 2000).

O problema de fluxo de potência ótimo (AC) teve sua primeira formulação nos anos 60 (Carpentier, 1962). Desde então, vários métodos de otimização foram propostos para resolver este problema, entre eles: o método do gradiente reduzido de Dommel-Tinney (Dommel e Tinney, 1968), gradiente reduzido generalizado (Abadie e Carpentier, 1969), o método de injeção diferencial de Carpentier (Carpentier, 1973), o método do Lagrangeano projetado (Murtagh e Saunders, 1982), métodos de programação quadrática sequencial (Biggs e Laughton, 1977; Burchett et al., 1984; Sun et al., 1984), algoritmos específicos baseados na resolução de uma sequência de problemas de programação linear (Alsaç et al., 1990) ou quadrática (Granville et al., 1991). A utilização de métodos de pontos interiores para este problema foi sugerida pela primeira vez em 1994, por Granville (Granville, 1994).

A representação linearizada (DC) do fluxo de potência ótimo tem sido utilizada, pois obtém-se maior simplicidade com grau de precisão dos resultados satisfatório (Oliveira e Soares, 2003). O problema de pré-despacho pode ser modelado como a minimização de uma função objetivo quadrática, correspondente aos custos de geração e perdas na transmissão do sistema de potência, sujeita a restrições lineares representando o fluxo de potência ativa. O pré-despacho de um sistema de potência hidrotérmico é um problema de planejamento operacional de curto prazo, onde curto prazo significa a operação horária durante um dia ou uma semana.

O sistema de geração é composto por um conjunto de unidades geradoras, enquanto que o sistema de transmissão é representado por um modelo de fluxo de carga de corrente contínua (DC). Neste modelo, as leis de Kirchhoff são representadas independentemente. O problema de fluxo de potência ótimo em apenas um intervalo de tempo pode ser formulado como um modelo estático (Oliveira e Soares, 2003). Já o modelo dinâmico é a extensão desta formulação para cada intervalo de tempo, acrescentando as restrições de acoplamento referente às metas e às rampas (Irissari, et al., 1998; Oliveira et al., 2005). As usinas hidroelétricas têm uma meta a cumprir, estabelecida pelo planejamento de longo prazo. As usinas termoeletricas, por sua vez, apresentam restrições de rampa, pois necessitam de um determinado tempo tanto para aumentar quanto para reduzir sua produção de energia. As usinas hidroelétricas também possuem restrições de rampa, mas isso é muito menos crítico.

O problema de fluxo de carga ótimo DC é estudado em (Oliveira e Soares, 2003; Oliveira et al., 2003) e a estrutura matricial do modelo explorada resultando em uma implementação bastante rápida e robusta. Este trabalho por sua vez foi estendido em (Oliveira et al., 2005) para o problema de pré-despacho sem a consideração das restrições em rampa. O problema de pré-despacho para sistemas puramente térmicos é abordado em (Irissari, et al., 1998).

### 1.2. Métodos de Pontos Interiores

Programação linear tem sido um assunto dominante em otimização desde que Dantzig (Dantzig, 1963) desenvolveu o método Simplex na década de 40. Em 1984, a publicação do trabalho de Karmarkar (Karmarkar, 1984) iniciou uma nova linha de pesquisa conhecida como métodos de pontos interiores, e uma década depois os métodos primais-duais surgiram como os métodos mais importantes e úteis desta classe de problemas (Wright, 1996).

Em programação linear, a diferença entre os métodos de pontos interiores e o método simplex está na natureza das soluções obtidas em cada iteração. No método simplex, as soluções pertencem à fronteira da região factível, enquanto que nos métodos de pontos interiores as soluções estão no interior da região factível. Além disso, no método simplex o número de iterações tende a crescer com o tamanho dos problemas, enquanto que nos métodos de pontos interiores não existe esta tendência (Adler et al., 1989).

Em 1955, surge o primeiro método de pontos interiores, atribuído a Frisch (Frisch, 1955). Este método foi exaustivamente estudado por Fiacco e McCormick (Fiacco e McCormick, 1968). Em 1967, Dikin (Dikin, 1967) publicou um trabalho que foi a base de muitos outros na área de pontos interiores. Em 1979, surge o primeiro método de programação linear de complexidade polinomial, o método das elipsóides de Khachiyan (Khachiyan, 1979). No entanto, sua convergência era muito lenta, não era robusto na presença de erros de arredondamento e necessitava de muita memória de armazenamento a cada iteração (Wright, 1996). Este método provou ser inferior ao método simplex.

Mas a maior descoberta no campo dos pontos interiores ocorreu em 1984, quando Karmarkar (Karmarkar, 1984) apresentou um novo método de pontos interiores para programação linear, também de complexidade polinomial. O método de Karmarkar é um método primal (Wright, 1996), ou seja, é descrito, motivado e implementado puramente em termos do problema primal, sem referência ao dual. A cada iteração, o método faz uma transformação projetiva do conjunto factível primal que leva a solução atual ao centro do conjunto e caminha no espaço transformado (Fletcher, 1987; Karmarkar, 1984).

A classe de métodos de pontos interiores que possui as melhores propriedades práticas e teóricas são os chamados métodos primais-duais. Tanto experimentos computacionais como o desenvolvimento teórico mostram que os métodos primais-duais são superiores aos demais métodos de pontos interiores em problemas práticos, chegando a ser melhor que o método simplex em problemas de grande porte (Wright, 1996).

Entre os métodos primais-duais, destaca-se o método preditor-corretor de Mehrotra (Mehrotra, 1992), que passou a ser a base da maioria dos códigos relacionados a pontos interiores, desde sua publicação em 1992. O método utiliza aproximações de segunda ordem para a trajetória primal-dual, conforme sugerido por Megiddo (Megiddo, 1986) e desenvolvido em (Karmarkar et al., 1989; Kojima et al., 1989; Monteiro et al., 1990). Além disso, o método parte de um ponto interior inactível, conforme implementado com sucesso em (Lustig et al., 1991). A contribuição de Mehrotra foi combinar estas idéias já existentes e adicionar heurísticas para escolha do parâmetro de centragem, tamanho do passo e ponto inicial.

Em 1991, Clements, Davis e Frey (Clements et al., 1991) apresentaram um dos primeiros estudos de pontos interiores aplicados a sistemas de potência. Em 1993, Vargas, Quintana e Vanelli (Vargas et al., 1993) apresentaram um método de pontos interiores para resolver o problema de pré-despacho econômico de sistemas de potência.

## 2. Modelo de Fluxo de Potência Ótimo DC

Adicionando as restrições de rampa (Probst, 2006) no modelo descrito em (Carvalho et al., 1988), um modelo de pré-despacho hidrotérmico para um sistema de potência, com  $m$  barras,  $n$  linhas de transmissão e  $g$  geradores, pode ser expresso como o seguinte problema de fluxo em redes:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \alpha \sum_{i=1}^t \frac{1}{2} f_i^t R_i f_i + \beta \sum_{i=1}^t \left( \frac{1}{2} p_i^t Q_i p_i + c_i^t p_i \right) \\
 \text{s.a} \quad & A_i f_i - E_i p_i = -l_i \quad i = 1, \dots, t \\
 & T_i f_i = 0 \quad i = 1, \dots, t \\
 & f_i^{\min} \leq f_i \leq f_i^{\max} \quad i = 1, \dots, t \\
 & p_i^{\min} \leq p_i \leq p_i^{\max} \quad i = 1, \dots, t \\
 & p_{i+1} - d_i \leq p_i \leq p_{i+1} + d_i \quad i = 1, \dots, t-1 \\
 & \sum_{i=1}^t p_i = q
 \end{aligned}$$

onde:

$f_i \in \mathbf{R}^n$  representa o vetor de fluxo de potência ativa;

$p_i \in \mathbf{R}^g$  representa o vetor de geração de potência ativa;

$R_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$  representa a matriz diagonal das resistências das linhas;

$Q_i \in \mathbf{R}^{g \times g}$  representa a matriz diagonal da componente quadrática do custo de geração;

$c_i \in \mathbf{R}^g$  representa a componente linear do custo de geração;

$A_i \in \mathbf{R}^{m \times n}$  representa a matriz de incidência da rede de transmissão;

$E_i \in \mathbf{R}^{m \times g}$  é a matriz formada pelos vetores canônicos correspondentes às barras de geração;

$T_i \in \mathbf{R}^{(n-m+1) \times n}$  representa a matriz de reatância da rede de transmissão;

$l_i \in \mathbf{R}^m$  representa o vetor demanda de potência ativa;

$f_i^{\max}$ ,  $f_i^{\min}$ ,  $p_i^{\max}$  e  $p_i^{\min}$  são os vetores de limites de fluxo e de geração de potência ativa;

$d_i$  representa a variação de energia permitida em cada usina termoeletrica;

$q$  representa a meta de geração de energia das usinas hidroelétricas para o horizonte em estudo;

$\alpha$  e  $\beta$  são ponderações dos objetivos a minimizar.

Embora os vetores  $f_i^{\max}$ ,  $f_i^{\min}$ ,  $p_i^{\max}$ ,  $p_i^{\min}$ ,  $d_i$  e  $c_i$  e as matrizes  $R_i$ ,  $Q_i$ ,  $A_i$ ,  $E_i$  e  $T_i$  envolvidas no modelo não variem com o tempo, esta notação se faz necessária momentaneamente.

### 3. Técnica de Solução

Modificando o modelo para que os limites inferiores das variáveis canalizadas sejam iguais a zero e introduzindo a variável  $h_i = p_i - p_{i+1}$ , obtemos o seguinte problema equivalente:

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha \sum_{i=1}^t \left( \frac{1}{2} \tilde{f}_i^t R_i \tilde{f}_i + c_{f_i}^t \tilde{f}_i \right) + \beta \sum_{i=1}^t \left( \frac{1}{2} \tilde{p}_i^t Q_i \tilde{p}_i + c_{p_i}^t \tilde{p}_i \right) \\ \text{s.a} \quad & A_i \tilde{f}_i - E_i \tilde{p}_i = -l_i^a \quad i = 1, \dots, t \\ & T_i \tilde{f}_i = l_i^b \quad i = 1, \dots, t \\ & 0 \leq \tilde{f}_i \leq \tilde{f}_i^{\max} \quad i = 1, \dots, t \\ & 0 \leq \tilde{p}_i \leq \tilde{p}_i^{\max} \quad i = 1, \dots, t \\ & \tilde{h}_i - \tilde{p}_i + \tilde{p}_{i+1} = d_i \quad i = 1, \dots, t-1 \\ & 0 \leq \tilde{h}_i \leq 2d_i \quad i = 1, \dots, t-1 \\ & \sum_{i=1}^t \tilde{p}_i = \tilde{q} \end{aligned}$$

onde  $h_i = p_i - p_{i+1}$ ,  $\tilde{f}_i = f_i - f^{\min}$ ,  $\tilde{p}_i = p_i - p^{\min}$ ,  $\tilde{f}_i^{\max} = f_i^{\max} - f_i^{\min}$ ,  $c_{f_i} = R_i f_i^{\min}$ ,  $c_{p_i} = c_i + Q_i p_i^{\min}$ ,  $l_i^a = E_i p_i^{\min} - l_i - A_i f_i^{\min}$ ,  $l_i^b = -T_i f_i^{\min}$  e  $\tilde{q} = q - \sum_{i=1}^t p_i^{\min}$ .

Introduzindo as variáveis de folga (por simplicidade de notação eliminamos os tils) obtemos:

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha \left( \frac{1}{2} f^t R f + c_f^t f \right) + \beta \sum_{i=1}^t \left( \frac{1}{2} p^t Q p + c_p^t p \right) \\ \text{s.a} \quad & A f - E p = l^a \\ & T f = l^b \\ & B p = q \\ & h - C p = d \\ & f + s_1 = f^{\max} \\ & p + s_2 = p^{\max} \\ & h + s_3 = 2d \\ & (f, p, h, s_1, s_2, s_3) \geq 0 \end{aligned}$$

onde  $f$ ,  $p$ ,  $c_f$ ,  $c_p$ ,  $l^a$ ,  $l^b$ ,  $f^{\max}$  e  $p^{\max}$  são vetores do tipo  $f = (f_1, \dots, f_t)$ ;  $h$  e  $d$  são vetores do tipo  $h = (h_1, \dots, h_{t-1})$ ;  $R$ ,  $Q$ ,  $A$ ,  $E$  e  $T$  são matrizes bloco diagonais do tipo  $R = \text{diag}(R_1, s, R_t)$ ;  $B = [I_g I_g \dots I_g]$  e

$$C = \begin{pmatrix} I_g & -I_g & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_g & -I_g & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_g & -I_g \end{pmatrix}.$$

Tanto as variáveis de folga como as variáveis estruturais do problema devem ser não negativas. Estas restrições de não negatividade podem ser impostas adicionando uma função de

barreira logarítmica (Bazaraa et al., 1979).

As condições necessárias de KKT para problemas de programação quadrática garantem que as derivadas parciais do Lagrangeano se anulam na solução ótima. Introduzindo as variáveis  $z_1 = \mu F^{-1}e$ ,  $z_2 = \mu P^{-1}e$  e  $z_3 = \mu H^{-1}e$ , onde  $e$  representa o vetor em que todos os elementos tem valor unitário e a notação  $F = \text{diag}(f)$  para matrizes diagonais é utilizada, obtemos as condições de otimalidade do problema perturbado:

- Factibilidade primal

$$\begin{aligned} Af - Ep &= l^a \\ Tf &= l^b \\ Bp &= q \\ h - Cp &= d \\ f + s_1 &= f^{\max} \\ p + s_2 &= p^{\max} \\ h + s_3 &= 2d \\ (f, p, h, s_1, s_2, s_3) &\geq 0, \end{aligned}$$

- Factibilidade dual

$$\begin{aligned} A^t y_1 + T^t y_2 + w_1 - z_1 + \alpha Rf &= -\alpha c_f \\ -E^t y_1 + B^t y_3 - C^t y_4 + w_2 - z_2 + \beta Qp &= -\beta c_p \\ y_4 + w_3 - z_3 &= 0 \\ (z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3) &\geq 0, \end{aligned}$$

- Complementaridade

$$\begin{aligned} FZ_1 e &= \mu e \\ PZ_2 e &= \mu e \\ HZ_3 e &= \mu e \\ S_1 W_1 e &= \mu e \\ S_2 W_2 e &= \mu e \\ S_3 W_3 e &= \mu e. \end{aligned}$$

#### 4. Métodos de Pontos Interiores Primais-Duais

Os métodos de pontos interiores primais-duais podem ser desenvolvidos através da aplicação do método de Newton às condições de otimalidade (Wright, 1996). Eles partem de um ponto estritamente positivo e não permitem que as variáveis se tornem negativas. Obtemos assim os métodos de trajetória central e o preditor-corretor, onde utilizamos os vetores  $x = (f, p, h, s_1, s_2, s_3)$  e  $v = (z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3)$ .

#### 4.1. Método de Trajetória Central

Dados  $(x^0, v^0) > 0$  e  $y^0$  livre,  $\sigma \in (0,1)$  e  $\tau \in (0,1)$ . Para  $k = 0, 1, 2, \dots$ , faça

1 Calcule  $\mu^k = \sigma(\frac{\gamma^k}{u})$ , onde  $u$  é a dimensão do vetor  $x$  e  $\gamma^k = (x^k)^t v^k$ .

2 Calcule a direção de Newton  $(\Delta x^k, \Delta v^k, \Delta y^k)$ .

3 Calcule o tamanho do passo  $\alpha^k$  para permanecer em um ponto interior, ou seja,  $\alpha^k = \min(1, \tau\rho_1^k, \tau\rho_2^k)$  onde  $\tau \in (0,1)$ ,  $\rho_1^k = \frac{-1}{\min_i(\Delta x_i^k/x_i^k)}$  e  $\rho_2^k = \frac{-1}{\min_i(\Delta v_i^k/v_i^k)}$ .

4 Calcule o novo ponto  $(x^{k+1}, v^{k+1}, y^{k+1}) = (x^k, v^k, y^k) + \alpha^k (\Delta x^k, \Delta v^k, \Delta y^k)$ .

#### 4.2. Método Preditor-Corretor

Dados  $(x^0, v^0) > 0$  e  $y^0$  livre,  $\sigma \in (0,1)$  e  $\tau \in (0,1)$ . Para  $k = 0, 1, 2, \dots$ , faça

1 Calcule a direção afim-escala  $(\mu^k = 0)$ .

2 Calcule o tamanho do passo  $\tilde{\alpha}^k$  tal que  $(\tilde{x}^{k+1}, \tilde{v}^{k+1}) > 0$ .

3 Calcule  $\mu^k$ .

4 Calcule a direção de Newton  $(\Delta x^k, \Delta v^k, \Delta y^k)$ .

5 Calcule o tamanho do passo  $\alpha^k$  tal que  $(x^{k+1}, v^{k+1}) > 0$ .

6 Calcule  $(x^{k+1}, v^{k+1}, y^{k+1}) = (x^k, v^k, y^k) + \alpha^k (\Delta x^k, \Delta v^k, \Delta y^k)$ .

#### 5. Detalhes da implementação

Os seguintes parâmetros têm valor fixo:  $\tau = 0.99995$  e  $\sigma = u^{-1}$ . O seguinte ponto inicial foi adotado (Oliveira et al., 2005):

$$f^0 = s_1^0 = \frac{f^{max}}{2}$$

$$p^0 = s_2^0 = \frac{p^{max}}{2}$$

$$h^0 = s_3^0 = d$$

$$z_1^0 = w_1^0 = (R + I)e$$

$$z_2^0 = w_2^0 = e$$

$$z_3^0 = w_3^0 = e$$

$$y_1^0 = y_2^0 = y_3^0 = y_4^0 = 0.$$

## PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

A direção de Newton é definida pelo seguinte sistema linear (o índice  $k$  será desconsiderado a partir de agora para evitar uma notação muito carregada):

$$\left. \begin{aligned}
 A\Delta f - E\Delta p &= r_1 \\
 T\Delta f &= r_2 \\
 B\Delta p &= r_3 \\
 \Delta h - C\Delta p &= r_4 \\
 \Delta f + \Delta s_1 &= r_5 \\
 \Delta p + \Delta s_2 &= r_6 \\
 \Delta h + \Delta s_3 &= r_7 \\
 A^t\Delta y_1 + T^t\Delta y_2 + \Delta w_1 - \Delta z_1 + \alpha R\Delta f &= r_8 \\
 -E^t\Delta y_1 + B^t\Delta y_3 - C^t\Delta y_4 + \Delta w_2 - \Delta z_2 + \beta Q\Delta p &= r_9 \\
 \Delta y_4 + \Delta w_3 - \Delta z_3 &= r_{10} \\
 F\Delta z_1 + Z_1\Delta f &= r_{11} \\
 P\Delta z_2 + Z_2\Delta p &= r_{12} \\
 H\Delta z_3 + Z_3\Delta h &= r_{13} \\
 S_1\Delta w_1 + W_1\Delta s_1 &= r_{14} \\
 S_2\Delta w_2 + W_2\Delta s_2 &= r_{15} \\
 S_3\Delta w_3 + W_3\Delta s_3 &= r_{16}
 \end{aligned} \right\}$$

onde os resíduos são dados por

$$\left. \begin{aligned}
 r_1 &= l^a - Af + Ep \\
 r_2 &= l^b - Tf \\
 r_3 &= q - Bp \\
 r_4 &= d - h + Cp \\
 r_5 &= f^{\max} - f - s_1 \\
 r_6 &= p^{\max} - p - s_2 \\
 r_7 &= 2d - h - s_3 \\
 r_8 &= -\alpha c_f - A^t y_1 - T^t y_2 - w_1 + z_1 - \alpha Rf \\
 r_9 &= -\beta c_p + E^t y_1 - B^t y_3 + C^t y_4 - w_2 + z_2 - \beta Qp \\
 r_{10} &= -y_4 - w_3 + z_3 \\
 r_{11} &= \mu e - FZ_1 e \\
 r_{12} &= \mu e - PZ_2 e \\
 r_{13} &= \mu e - HZ_3 e \\
 r_{14} &= \mu e - S_1 W_1 e \\
 r_{15} &= \mu e - S_2 W_2 e \\
 r_{16} &= \mu e - S_3 W_3 e.
 \end{aligned} \right\}$$



### 5.1. Resolução do Sistema Linear

A matriz do sistema dos métodos pode ter sua dimensão significativamente reduzida através da eliminação de variáveis sem modificar sua estrutura esparsa. Primeiramente substituímos as variáveis de folga primais e duais:

$$\begin{aligned}\Delta s_1 &= r_5 - \Delta f \\ \Delta s_2 &= r_6 - \Delta p \\ \Delta s_3 &= r_7 - \Delta h \\ \Delta z_1 &= F^{-1}(r_{11} - Z_1 \Delta f) \\ \Delta z_2 &= P^{-1}(r_{12} - Z_2 \Delta p) \\ \Delta z_3 &= H^{-1}(r_{13} - Z_3 \Delta h) \\ \Delta w_1 &= S_1^{-1}(r_{14} - W_1 \Delta s_1) \\ \Delta w_2 &= S_2^{-1}(r_{15} - W_2 \Delta s_2) \\ \Delta w_3 &= S_3^{-1}(r_{16} - W_3 \Delta s_3).\end{aligned}$$

Com estas substituições, o sistema se reduz a:

$$\left\{ \begin{array}{l} A\Delta f - E\Delta p = r_1 \\ T\Delta f = r_2 \\ B\Delta p = r_3 \\ \Delta h - C\Delta p = r_4 \\ A^t\Delta y_1 + T^t\Delta y_2 + D_1\Delta f = \tilde{r}_5 \\ -E^t\Delta y_1 + B^t\Delta y_3 - C^t\Delta y_4 + D_2\Delta p = \tilde{r}_6 \\ \Delta y_4 + D_3\Delta h = \tilde{r}_7 \end{array} \right.$$

onde

$$\begin{aligned}D_1 &= S_1^{-1}W_1 + F^{-1}Z_1 + \alpha R \\ D_2 &= S_2^{-1}W_2 + P^{-1}Z_2 + \beta Q \\ D_3 &= S_3^{-1}W_3 + H^{-1}Z_3 \\ \tilde{r}_5 &= r_8 - S_1^{-1}r_{14} + S_1^{-1}W_1 r_5 + F^{-1}r_{11} \\ \tilde{r}_6 &= r_9 - S_2^{-1}r_{15} + S_2^{-1}W_2 r_6 + P^{-1}r_{12} \\ \tilde{r}_7 &= r_{10} - S_3^{-1}r_{16} + S_3^{-1}W_3 r_7 + H^{-1}r_{13}.\end{aligned}$$

Somente inversas de matrizes diagonais são envolvidas. Agora as variáveis primais podem ser eliminadas:

$$\begin{aligned}\Delta f &= D_1^{-1}(\tilde{r}_5 - A^t\Delta y_1 - T^t\Delta y_2) \\ \Delta p &= D_2^{-1}(\tilde{r}_6 + E^t\Delta y_1 - B^t\Delta y_3 + C^t\Delta y_4) \\ \Delta h &= D_3^{-1}(\tilde{r}_7 - \Delta y_4)\end{aligned}$$

reduzindo o sistema para:

$$\begin{cases} (AD_1^{-1}A^t + ED_2^{-1}E^t)\Delta y_1 + AD_1^{-1}T^t\Delta y_2 - ED_2^{-1}B^t\Delta y_3 + ED_2^{-1}C^t\Delta y_4 = \tilde{r}_1 \\ TD_1^{-1}A^t\Delta y_1 + TD_1^{-1}T^t\Delta y_2 = \tilde{r}_2 \\ -BD_2^{-1}E^t\Delta y_1 + BD_2^{-1}B^t\Delta y_3 - BD_2^{-1}C^t\Delta y_4 = \tilde{r}_3 \\ CD_2^{-1}E^t\Delta y_1 - CD_2^{-1}B^t\Delta y_3 + (CD_2^{-1}C^t + D_3^{-1})\Delta y_4 = \tilde{r}_4 \end{cases}$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{r}_1 &= AD_1^{-1}\tilde{r}_5 - ED_2^{-1}\tilde{r}_6 - r_1 \\ \tilde{r}_2 &= TD_1^{-1}\tilde{r}_6 - r_2 \\ \tilde{r}_3 &= BD_2^{-1}\tilde{r}_6 - r_3 \\ \tilde{r}_4 &= D_3^{-1}\tilde{r}_7 - CD_2^{-1}\tilde{r}_6 - r_4. \end{aligned}$$

Uma análise na estrutura de  $BD_2^{-1}B^t$  mostra que esta matriz é diagonal com entradas positivas, logo  $\Delta y_3$  pode ser isolado no terceiro bloco de equações:

$$\Delta y_3 = (BD_2^{-1}B^t)^{-1}(\tilde{r}_3 + BD_2^{-1}E^t\Delta y_1 + BD_2^{-1}C^t\Delta y_4)$$

reduzindo o sistema para:

$$\begin{cases} (AD_1^{-1}A^t + EM_1E^t)\Delta y_1 + AD_1^{-1}T^t\Delta y_2 + EM_1C^t\Delta y_4 = \bar{r}_1 \\ TD_1^{-1}A^t\Delta y_1 + TD_1^{-1}T^t\Delta y_2 = \tilde{r}_2 \\ CM_1E^t\Delta y_1 + (CM_1C^t + D_3^{-1})\Delta y_4 = \bar{r}_4 \end{cases}$$

onde

$$\begin{aligned} M_1 &= D_2^{-1} - D_2^{-1}B^t(BD_2^{-1}B^t)^{-1}BD_2^{-1} \\ \bar{r}_1 &= \tilde{r}_1 + ED_2^{-1}B^t(BD_2^{-1}B^t)^{-1}\tilde{r}_3 \\ \bar{r}_4 &= \tilde{r}_4 + CD_2^{-1}B^t(BD_2^{-1}B^t)^{-1}\tilde{r}_3. \end{aligned}$$

## 6. Resultados Numéricos

Os testes computacionais realizados utilizaram a linguagem de programação MATLAB 7.0 em um sistema operacional Linux, processador Intel Pentium 3.4 GHz. A precisão adotada é de  $10^{-3}$ .

Em todos os experimentos foram adotados os valores  $f_i^{min} = -f_i^{max}$  para as linhas de transmissão e  $p_i^{min} = 0$  para os geradores. Somente funções quadráticas puras foram utilizadas, ou seja,  $c_i = 0$ , e os coeficientes quadráticos são os mesmos para todos os geradores. Os sistemas de teste utilizados foram o IEEE30 e o IEEE118 e o horizonte em questão é de 24 horas ( $t=24$ ). Para todos os geradores foram estabelecidas metas (embora na prática estas restrições se apliquem apenas às usinas hidroelétricas) e rampas (embora estas restrições sejam mais importantes para as usinas termoelétricas).

A Tabela 1 mostra a variação da demanda ao longo do dia. Estes fatores correspondem a um dia típico de semana fornecidos pela CESP (Chiavegato et al., 2001).

Hora	Fator	Hora	Fator
1:00	0,7948	13:00	1,0557
2:00	0,7425	14:00	1,0823
3:00	0,7255	15:00	1,0814
4:00	0,7222	16:00	1,0846
5:00	0,7345	17:00	1,1134
6:00	0,7816	18:00	1,1714
7:00	0,9012	19:00	1,2998
8:00	0,9832	20:00	1,2393
9:00	1,0535	21:00	1,1658
10:00	1,0896	22:00	1,1089
11:00	1,0976	23:00	1,0000
12:00	1,0888	24:00	0,8828

Tabela 1: Fatores de Carga

A Tabela 2 resume os resultados obtidos pelos métodos nos vários casos para o sistema IEEE30, quanto ao número de iterações e esforço computacional. Nos primeiros casos, os limites foram escolhidos de forma que na otimalidade não existam restrições de capacidade ativas. O Caso 1 considera apenas as perdas de transmissão ( $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$ ). No Caso 2 são considerados apenas os custos de geração ( $\alpha = 0$  e  $\beta = 1$ ). No Caso 3 são considerados ambos os objetivos. As perdas de transmissão são dadas em MW e os custos de geração em unidades monetárias, logo as ponderações  $\alpha$  e  $\beta$  devem levar em consideração esta diferença de unidades entre os objetivos. Se fixarmos  $\beta = 1$ , então  $\alpha$  deve ser o custo marginal de uma unidade de perda de transmissão por unidade monetária. Para validação da implementação consideramos  $\alpha = \beta = 1$  neste trabalho. Os próximos testes buscam analisar o desempenho dos métodos em situações mais restritas. No Caso 4 a capacidade de geração das usinas é limitada em 72 MW. No Caso 5 a capacidade de transmissão das linhas é limitada em 62 MW. No Caso 6 a variação de geração permitida (rampa) é de 10 MW. No Caso 7 os três limites citados anteriormente são considerados em conjunto.

Caso	Trajetória Central		Preditor-Corretor	
	Iter.	Tempo	Iter.	Tempo
1	6	0,80	4	0,72
2	6	0,81	4	0,72
3	6	0,81	3	0,56
4	7	0,93	4	0,72
5	8	1,06	5	0,88
6	7	0,93	5	0,89
7	11	1,45	6	1,05

Tabela 2: IEEE30 - Iter. e Tempo de CPU (s)

A Figura 1 mostra o gráfico do despacho para o Caso 2, em que o despacho de cada gerador acompanha a curva da demanda, pois os custos de geração considerados são todos iguais.

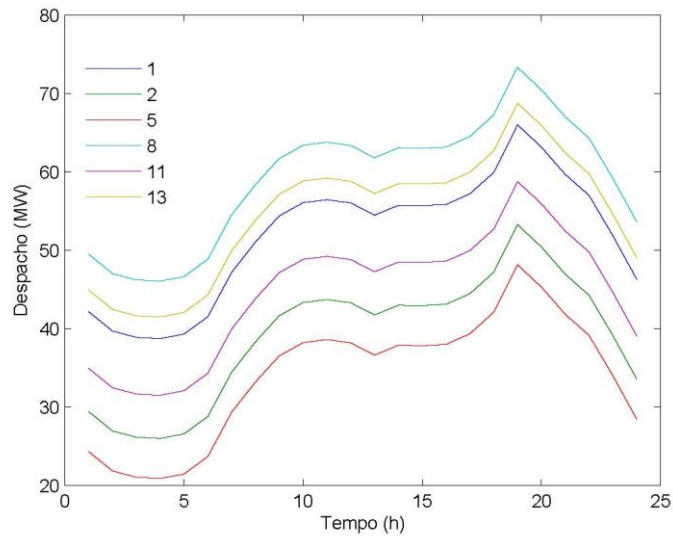


Figura 1: Caso 2 - Apenas custos de geração

A Figura 2 (Caso 3) mostra uma situação intermediária entre os casos 1 e 2, pois são consideradas tanto as perdas de transmissão como os custos de geração.

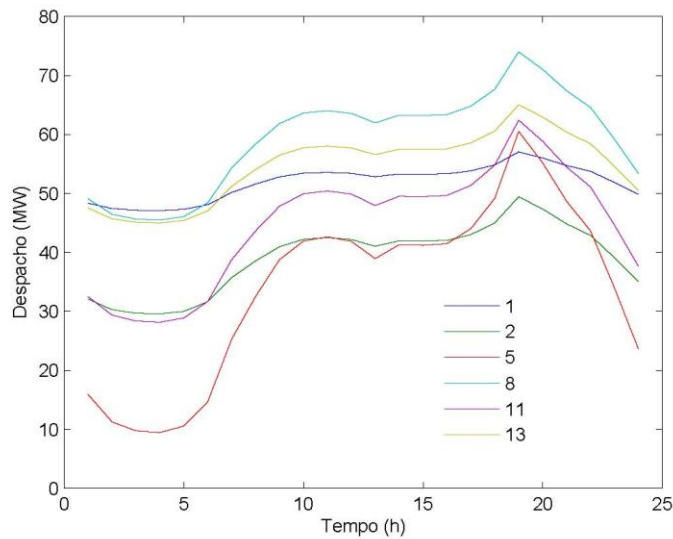


Figura 2: Caso 3 - Perdas de transmissão e custos de geração

Na Figura 3 (Caso7), a capacidade de geração da barra 8 está no limite às 19h, além de outras restrições de capacidades ativas.

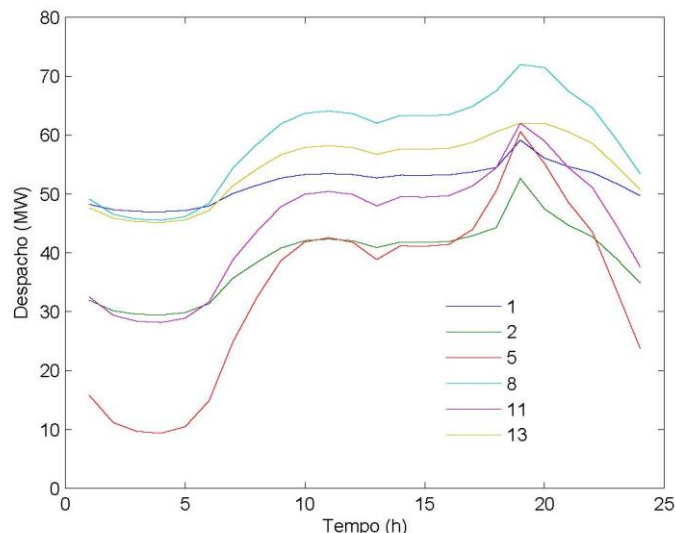


Figura 3: Caso 7 - Três tipos de restrições ativas

A Tabela 3 se refere aos testes realizados com o sistema IEEE118. Os Casos 8–12 reproduzem situações semelhantes aos Casos 3–7, mas para o sistema IEEE118. No Caso 8 os limites são escolhidos para que na otimalidade não existam restrições de capacidade ativas. No Caso 9 a capacidade de geração é limitada em 220 MW. No Caso 10 a capacidade de transmissão é limitada em 140 MW. No Caso 11 a variação de geração permitida é de 18 MW. No Caso 12 os três limites anteriores são considerados em conjunto.

Caso	Trajetória Central		Preditor-Corretor	
	Iter.	Tempo	Iter.	Tempo
8	6	35,86	4	27,04
9	8	47,73	4	27,09
10	7	41,76	4	27,03
11	9	54,08	5	33,85
12	11	66,21	7	48,36

Tabela 3: IEEE118 - Iter. e Tempo de CPU (s)

A Tabela 4 compara os resultados obtidos com um modelo que não considera as restrições de rampa (Oliveira et al., 2005), utilizando o método preditor-corretor. Os Casos 3–5 foram escolhidos porque há restrição de rampa ativa. A Tabela 5 compara o valor das funções objetivo nos casos onde a restrição de rampa está ativa. Esta diferença mostra a natureza distinta dos modelos.

Caso	Com Rampa		Sem Rampa	
	Iter.	Tempo	Iter.	Tempo
3	3	0,56	3	0,46
4	4	0,72	7	0,51
5	5	0,88	3	0,37

Tabela 4: Modelos - Iter. e Tempo de CPU (s)

Caso	Valor com Rampa	Dif. sem Rampa
6	$1,15 \times 10^6$	4,94
7	$1,15 \times 10^6$	19,10
11	$1,32 \times 10^7$	34,96
12	$1,32 \times 10^7$	20,24

Tabela 5: Diferença na Função Objetivo

## 7. Conclusões e Perspectivas Futuras

Neste trabalho o problema de pré-despacho de um sistema de potência hidrotérmico é formulado como um problema de fluxo em redes e o modelo resultante é resolvido por métodos de pontos interiores. Uma característica a ser destacada pelo método de pontos interiores é a robustez. Mesmo para problemas bastante sobrecarregados, o método converge bem, sem apresentar instabilidade numérica com uma precisão maior que a necessária em uma aplicação prática. Outra característica é a velocidade. O maior número de iterações para os sistemas testados foi 7 para o método preditor-corretor e 11 para o método de trajetória central, mesmo para sistemas muito sobrecarregados. Comparando os dois métodos, o preditor-corretor obteve desempenho superior em todos os casos testados, conseguindo um tempo computacional menor mesmo considerando o maior esforço computacional por iteração.

Comparando o modelo apresentado neste trabalho com os modelos que não levam em consideração as restrições de rampa, a implementação se mostrou eficiente e competitiva. Este trabalho, portanto, representa um passo adicional na modelagem do problema com os procedimentos que devem ser futuramente adotados na prática em convênio com o ONS – Operador Nacional do Sistema Elétrico.

Nos métodos de pontos interiores o ponto inicial utilizado é crucial, pois ajuda a reduzir o número de iterações. Como sugestão de melhoria, outro ponto inicial pode ser obtido a partir do modelo estático (Oliveira e Soares, 2003; Oliveira et al., 2005). Para cada intervalo de tempo, um problema de fluxo de potência ótimo é resolvido com uma tolerância relaxada, e esta solução é usada como ponto inicial para este intervalo de tempo no problema de pré-despacho. Nesta abordagem, apenas as restrições de metas e rampas não são satisfeitas.

Outra sugestão é explorar ainda mais a estrutura matricial particular do problema, reduzindo a dimensão do sistema a ser resolvido. Nos testes implementados foi utilizado um sistema que não envolve a inversão de nenhuma matriz não diagonal. Para eliminar  $\zeta y_2$  ou  $\zeta y_4$  do sistema resultante, seria necessário inverter matrizes não diagonais. A implementação destas eliminações em MATLAB mostrou-se ineficiente. Se for possível criar um método eficiente para inverter estas matrizes explorando suas estruturas matriciais esparsas, o esforço computacional pode diminuir. Além disso, seria conveniente fazer a implementação dos métodos em outras linguagens (C ou FORTRAN, por exemplo), a fim de reduzir o tempo computacional e explorar a estrutura matricial.

## Agradecimentos

Este trabalho foi financiado pela FAPESP – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo e pelo CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

### Referências Bibliográficas

- ABADIE, J. E CARPENTIER, J. (1969). Generalization of the Wolfe gradient method to the case of nonlinear constraints, Optimization Academic Press, London, pp. 37–47.
- ADLER, I., RESENDE, M.G.C., VEIGA, G. E KARMARKAR, N. (1989). An implementation of Karmarkar's algorithm for linear programming, Mathematical Programming, 44, pp. 297–335.
- ALSAÇ, O., BRIGHT, J., PRAIS, M. E SCOTT, B. (1990). Further developments in Lpbased optimal power flow, IEEE Transaction on PAS, 5, pp. 697–711.
- BAZARAA, M. S., SHERALI, H. D. E SHETTY, C. M. (1979). Nonlinear Programming: Theory and Algorithms, John Willey & Sons, Inc.
- BIGGS, M.C. E LAUGHTON, M.A. (1977). Optimal electric power scheduling: a large nonlinear programming test problem solved by recursive quadratic programming, Mathematical Programming, 13, pp. 167–182.
- BURCHETT, R.C., HAPP, H.H. E VIERATH, D.R. (1984) Quadratically convergent optimal power flow, IEEE Transaction on PAS, 103, pp. 3267–3275.
- CARPENTIER, J. (1962). Contribution a l'étude du dispatching économique, Bulletin de la Societe Francaise des Electriciens, 3, pp. 431–447.
- CARPENTIER, J. (1973). Differential injection methods: a general method for secure and optimal load flows, Proc. of IEEE PICA Conference, Minneapolis, pp. 225–262.
- CARVALHO, M. F., SOARES, S. E OHISHI, T. (1988). Optimal active power dispatch by network flow approach, IEEE Transactions on Power Systems 3(3): 1640–1647.
- CHIAVEGATO, F. G., OLIVEIRA, A. R. L. E SOARES, S. (2001). Pré-despacho de sistemas de energia elétrica via relaxação Lagrangeana e métodos de pontos interiores, Anais do 22nd. Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE, Campinas SP, CIL110 pp. 1–24.
- CLEMENTS, K.A., DAVIS, P.W. E FREY, K.D. (1991). An interior point algorithm for weighted least absolute value power system state estimation, IEEE/PES Winter Meeting, New York, Paper no 235-2.
- DANTZIG, G.B. (1963). Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, Princeton.
- DIKIN, I.I. (1967). Iterative solution of problems of linear and quadratic programming, Soviets Math. Doklady, 8, pp. 674–675.
- DOMMEL, H.W. E TINNEY, W.F. (1968). Optimal power flow solution, IEEE Transactions on PAS, 87, pp. 1866–1876.
- FIACCO, A.V. E MCCORMICK, G.P. (1968). Nonlinear programming: sequential unconstrained minimization techniques, John Willey & Sons, Inc..
- FLETCHER, R. (1987). Practical Methods of Optimization, John Willey & Sons, Inc..
- FRISCH, K.R. (1955). The logarithmic potential method of convex programming, Technical report, University Institute of Economics, Oslo.
- GRANVILLE, S. (1994). Optimal reactive power dispatch through interior point methods, IEEE Transactions on Power Systems, 9, pp. 136–146.
- GRANVILLE, S., LIMA, M.C., LIMA, L.C. E PRADO, S. (1991). Planvar - an optimization software

## PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

for VAR sources planning, Symposium in Mathematical Programming – Amsterdam.

IRISSARI, G., KIMBALL, L. M., CLEMENTS, K. A., BAGCHI, A. E DAVIS, P.W. (1998). Economic dispatch with network and ramping constraints via interior point methods, *IEEE Transactions on Power Systems*, 13, pp. 236–242.

KARMAKAR, N. (1984). A new polynomial-time algorithm for linear programming, *Combinatorica*, 4, pp. 373–395.

KARMAKAR, N., LAGARIAS, J.C., SLUTSMAN, L. E WANG, P. (1989). A parallel formulation of interior-point algorithms, *AT&T Technical Journal*, 68, pp. 20–36.

KHACHIYAN, L.G. (1979). A polynomial algorithm in linear programming, *Soviet Mathematics Doklady*, 20, pp. 191–194.

KOJIMA, M., MIZUNO, S. E YOSHISE, A. (1989). A primal-dual interior point algorithm for linear programming. *Progress in Mathematical Programming: Interior Point and related Methods*, Springer Verlag, New York.

LUSTIG, I.J., MARSTEN, R.E. E SHANNO, D.F. (1991). Computational experience with a primal-dual interior-point method for linear programming, *Linear Algebra Appl.*, 152, pp. 191–222.

MEGIDDO, N. (1986). Pathways to the optimal set in linear programming, *Mathematical Programming*, pp. 131–158.

MEHROTRA, S. (1992). On the implementation of a primal-dual interior point method, *SIAM Journal on Optimization*, 2, pp. 575–601.

MOMOH, J.A., EL-HAWARY M.E. E ADAPA, R. (1999). A review of selected optimal power flow literature to 1993, part I Nonlinear and quadratic programming approaches, *IEEE Transactions on Power Systems*, 14, pp. 96–104.

MONTEIRO, R.D.C., ADLER, I. E RESENDE, M.G.C. (1990). A polynomial-time primal-dual affine scaling algorithm for linear and convex quadratic programming and its power series extension, *Mathematics of Operations Research*, 15, pp. 191–214.

MURTAGH, B.A. E SAUNDERS, M.A. (1982). A projected lagrangian algorithm and its implementation for sparse nonlinear constraints, *Mathematical Programming Study*, 16, pp. 84–117.

OLIVEIRA, A.R.L. E SOARES, S. (2003). Métodos de pontos interiores para problema de fluxo de potência ótimo DC, *SBA: Controle & Automação*, 14, pp. 278–285.

OLIVEIRA, A.R.L., SOARES, S. E NEPOMUCENO, L. (2003). Optimal active power dispatch combining network flow and interior point approaches, *IEEE Transactions on Power Systems*, 18, pp. 1235–1240.

OLIVEIRA, A.R.L., SOARES, S. E NEPOMUCENO, L. (2005). Short term hydroelectric scheduling combining network flow and interior point approaches, *Electrical Power & Energy Systems*, 27, pp. 91–99.

PROBST, R. W. (2006). Métodos de pontos interiores aplicados ao problema de pré-despacho de um sistema hidrotérmico. *Dissertação de Mestrado*, Universidade Estadual de Campinas.

QUINTANA, V.H., TORRES, G.L. E MEDINA-PALOMO, J. (2000). Interior point methods and their applications to power systems: A classification of publications and software codes, *IEEE Transactions on Power Systems*, 15, pp. 170–176.



## PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

SUN, D.J., ASHLEY, B., BREWER, B., HUGHES, A. E TINNEY, W.F. (1984). Optimal power flow by Newton approach, IEEE Transaction on PAS, 103, pp. 2864–2880.

VARGAS, L., QUINTANA, V. E VANNELLI, A. (1993). A tutorial description of an interior point method and its application to security constrained economic dispatch, IEEE Transactions on Power Systems, 11, pp. 1315–1324.

WRIGHT, S.J. (1996). Primal–Dual Interior–Point Methods, SIAM Publications, SIAM, Philadelphia, PA, USA.